UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

PROGETTO NAZIONALE DI RICERCA (40% MURST)
"RICERCHE DI MATEMATICA E DI INFORMATICA PER LA DIDATTICA"

Anno Accademico 1990-91

Carlo Felice Manara

LETTURA TRASVERSALE DEI PROGRAMMI DELLA SCUOLA ELEMENTARE
(OSSERVAZIONI RISERVATE AGLI INSEGNANTI)

RAPPORTO INTERNO N.3/91

LETTURA TRASVERSALE DEI PROGRAMMI. OSSERVAZIONI, RISERVATE AGLI INSEGNANTI, SULLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA NELLE SCUOLE ELEMENTARI

1 - La didattica della matematica, soprattutto nella scuola elementare, dovrebbe mirare a fornire una idea giusta delle procedure di questa scienza ed in generale del pensiero matematico.

Il risultato che spesso si ottiene e' invece quello di presentare una serie di regole non molto motivate, che vengono memorizzate senza essere capite, che spesso sono considerate come misteriose ed ingombranti, e quindi dimenticate appena si puo'. In questo modo la matematica prende l'aspetto di qualche cosa di magico: un coacervo di procedimenti che soltanto gli iniziati, e coloro che hanno particolari doti, sanno far funzionare.

2 - Si sente spesso parlare, e si legge spesso, di "matematizzazione della realta'" ; noi preferiamo parlare di "matematica chiave di lettura della realta'". Con questo modo di esprimerci vorremmo mettere in luce il fatto che la matematica possiede un aspetto che la fa assimilare al linguaggio abituale, che noi adottiamo per comunicare le nostre osservazioni, per dare informazioni, e per presentare i nostri ragionamenti. Ci pare di poter dire che la matematica presenta queste possibilita' concettuali e strumentali ; ma essa ha certe caratteristiche specifiche che pongono dei problemi didattici particolari.

La riflessione su cio' che accomuna la matematica al linguaggio comune e su cio' che la diversifica da quello in modo specifico puo' aiutare da una parte a comprendere la matematica stessa e dall'altra ad insegnarla in modo efficace ed utile.

Tuttavia, prima di proseguire, vorremo osservare che, a nostro parere, lo scopo finale del procedimento di apprendimento dovrebbe essere una appropriazione di idee e di metodi. Infatti, quando ci esprimiamo nella nostra lingua, lo facciamo con speditezza e senza sforzo, perche' la lingua, a questo livello, ci si presenta come lo strumento naturale della nostra comunicazione . Qualche cosa di analogo dovrebbe avvenire per la matematica, quando ci si appropria delle sue idee fondamentali e dei suoi strumenti espressivi.

3 - Vorremmo osservare che le operazioni fondamentali, mentali e fisiche, che conducono all'utilizzazione del linguaggio matematico sono, in origine, abbastanza analoghe a quelle che noi eseguiamo per utilizzare il linguaggio comune. Tuttavia le differenze tra linguaggio naturale e linguaggio matematico diventano presto talmente grandi che la matematica viene spesso

presentata come qualcosa di totalmente distaccato dal linguaggio naturale; e purtroppo viene anche accentuato il suo aspetto di insieme di regole rigidissime e, come abbiamo detto, spesso memorizzate senza molta motivazione.

Per giustificare, almeno in parte, cio' che precede possiamo osservare che presso tutte le lingue (o almeno le occidentali) vi sono dei vocaboli che indicano i concetti numerici; anzi addirittura presso molte lingue vi sono due serie di vocaboli che indicano il numero naturale; e precisamente una serie di vocaboli per i numeri cardinali, ed un'altra serie di vocaboli per i numeri ordinali. Il che significa - a nostro parere - che il concetto di numero e' in qualche modo elementare e naturale, come ogni altro concetto elementare che viene espresso dal bambino per imitazione e per uso vitale, allo scopo di interferire con l'ambiente che lo circonda.

Piu' precisamente si potrebbe quindi osservare che la distinzione tra uno e molti e' del tutto naturale , e fa parte di quella concettualizzazione iniziale, intuitiva e spontanea che e' alla base di ogni operazione mentale; l'operazione di contare gli elementi di un insieme finito appartiene gia' ad un livello superiore, perche' richiede una successione di atti di distinzione che puo' offrire una prima difficolta' al bambino; ma i numeri piccoli, come due e tre, sono forse immediatamente associati agli insiemi corrispondenti, senza che vi sia bisogno di una operazione distinta; e cio' e' confermato dalla osservazione della Stella Baruk, a proposito della esistenza del "duale" nella lingua greca (forse moderna, certamente nell'antica) cioe' della esistenza di una serie di vocaboli destinati ad esprimere i concetti relativi alla coppia di elementi, percepita e trattata come un tutto unico.

Per queste ragioni dunque l'insegnamento dell'aritmetica non si distingue, nei suoi inizi almeno, dall'insegnamento dei piu' elementari mezzi espressivi.

Tuttavia il momento che interessa di piu' l'insegnamento e' quello in cui avviene la differenziazione; e questo momento - a nostro parere - inizia con l'insegnamento delle convenzioni della rappresentazione dei concetti numerici, e con l'insegnamento delle regole di tali convenzioni.

4 - E' facile osservare che il linguaggio comune possiede una grande ridondanza: cio' significa che le parole abitualmente utilizzate per trasmettere un messaggio non sarebbero tutte strettamente necessarie: molte sono ridondanti Cio' avviene per tutti i linguaggi naturali; e si deve osservare anche che, in questi casi, l'informazione e' spesso integrata ed arricchita dagli atteggiamenti del corpo, dai gesti, dalla mimica del viso, dall'accento, dalle pause ecc. E tuttavia, anche nell'ambito della lingua materna, il discente deve apprendere ad applicare tutta una seria di regole convenzionali che sono presenti in ogni lingua, che sono in larga misura di origine storica , e quindi non facilmente giustificabili in termini della sola ragione.

Per esempio e' noto che il plurale del singolare "tavolo" fa "tavoli" ; ma non si vede alcuna ragione a priori perche' il plurale di "amico" non sia "amichi" o addirittura "amiki"; ed infine perche' il plurale di "dito" debba essere "dita" e non "diti" (come si trova in qualche autore del secolo XV). Queste osservazioni sono del tutto banali, e potrebbero essere moltiplicate, invadendo il campo sterminato della grammatica e della morfologia.

Osservazioni analoghe potrebbero essere fatte a proposito della sintassi: e' noto che, nella struttura della frase italiana, il soggetto dovrebbe essere posto prima del verbo, ed il predicato dopo il verbo; l'inversione di questo ordine richiede una attenzione notevole per evitare equivoci, oppure vuol significare l'intenzione di chi parla o scrive di esprimere una particolare enfasi: ne e' prova il fatto che questa inversione di posto e' abitualmente utilizzata nei titoli dei giornali. Il che da' l'impressione di una continua ed inutile enfasi nella presentazione delle notizie, enfasi che rischia poi di attutire costantemente l'attenzione del lettore.

E' noto invece che, nella lingua tedesca, il verbo deve essere messo di regola al fondo della frase; e questa circostanza aiuta chi legge o ascolta a riconoscere le frasi quando esse comunicano un pensiero compiuto.

Anche queste osservazioni sono banali; anche queste potrebbero essere moltiplicate; esse - a nostro parere - giustificano i vari tentativi diretti a razionalizzare le lingue vive, oppure a costruire delle lingue artificiali razionali; ovviamente il criterio per giustificare una cosiddetta razionalizzazione e' strettamente personale, ed anche per questa ragione i tentativi stessi sono stati resi vani dalla tenace abitudine degli uomini.

5 - Abbiamo visto che nel caso delle lingue naturali la sintassi (cioe' l'insieme delle regole per utilizzare i simboli, in modo che questi siano comprensibili) e' strettamente convenzionale, anche se questo fatto e' nascosto dall'abitudine e dalla tradizione, che spesso fanno giudicare naturali certe leggi e certe regole che sono soltanto dovute a convenzioni ed a abitudini.

Un fenomeno analogo si presenta anche nel caso della espressione dei concetti matematici: il primo momento e' quello della espressione, verbale o grafica, del numero naturale cardinale; ed anche in questo caso le regole di questa rappresentazione sono strettamente convenzionali: il che significa che tali regole sono dettate soltanto dall'abitudine e dalla scelta fatta in base a criteri che non sono mai assoluti. Tuttavia dobbiamo imparare a leggere, sotto tali regole, le leggi fondamentali dell'aritmetica , leggi che rimangono immutate anche al variare delle convenzioni e delle regole che le comandano.

Per sottolineare la convenzionalita' delle regole che reggono la rappresentazione dei numeri interi naturali possiamo ricordare le regole dei Romani: non e' molto difficile osservare che esse sono dettate dalla comodita' di utilizzare le dita di una mano o quelle della coppia di mani.
Questa osservazione conduce a comprendere la esistenza di certi simboli appositi, dedicati ad esprimere i numeri che praticamente si rappresentano con una o due mani, ed i loro multipli: I, V, X, L, C, D, M.

Insieme a questi simboli elementari vi sono poi delle regole per la formazione di numeri diversi, che si esprimono per somma o per differenza dei numeri rappresentati dai simboli elementari; ed in questi casi si hanno delle regole sintattiche, che debbono essere rispettate perche' una successione di simboli rappresenti un numero. Per esempio il numero che noi oggi rappresentiamo con il simbolo "99" non puo' essere rappresentato come 100-1 ossia con il simbolo "IC", ma deve essere rappresentato come: (100-10)+(10-1) ossia con il simbolo "XCIX".

Si potrebbe osservare che il punto fondamentale della rappresentazione del numero intero naturale sia l'operazione mentale che consiste nel prendere in considerazione un gruppo di elementi, immaginato e manipolato come una sola cosa.

Possiamo prendere questa operazione come elementare, e darla per nota; riteniamo infatti che non siano utili delle considerazioni ulteriori, magari di teoria ingenua degli insiemi, per meditare su un operazione che fa parte delle procedura elementari primitive della mente umana .

A questo proposito ricordiamo cio' che viene raccontato dall'esploratore Leonard Clark nel suo libro intitolato "I fiumi scendevano ad oriente " (Milano 1969 - Garzanti) . In tale libro si parla del viggio fatto dall'autore in Amazzonia presso popolazioni del tutto primitive. L'autore racconta che certi indios utilizzano le dita delle mani e dei piedi (ovviamente privi di scarpe) per rappresentare i numeri dei pesci pescati.
Egli si incuriosi' un giorno, osservando che la pesca era stata di un numero di pesci maggiore di 20, e credendo che l'indio che contava i pesci sarebbe stato imbarazzato per mancanza di strumenti espressivi, dato che l'insieme da contare era superiore al numero delle sue dita. Ma l'indio, dopo aver esaurito le dita delle mani e dei piedi, fece un segno col dito sulla parete della capanna, e ricomincio' da zero. In altre parole, anche per una persona del tutto incolta, l'operazione di raggruppare gli elementi di un insieme in un gruppo formato da un numero fissato di elementi, e di considerare quel gruppo come un tutto unico, si era presentata spontanea. Lo stesso avvenne per i Romani (dita di una mano, di due mani ...) e per i Greci antichi.

Pertanto uno dei momenti fondamentali per la costruzione di un linguaggio che rappresenti i numeri e' costituito dalla scelta della base, cioe' del numero di elementi che costituiscono il raggruppamento fondamentale da trattarsi come un tutto unico.

Questa scelta costituisce un prima convenzione, e non e' dettata dalla logica, anche se per noi (e forse anche per gli altri popoli che hanno fatto scelte diverse) puo' essere pensata in qualche modo come naturale; per esempio si direbbe che per gli antichi Celti la base fosse il numero 20, perche' cosi' si spiegano certi termini della lingua francese, come "quatre-vingt" per indicare 80.

Gli esercizi per il cosiddetto "calcolo multi-base" che vengono prescritti dai programmi di matematica per la scuola elementare, e che sono propinati da molti testi, sono diretti a sottolineare la coscienza del fatto che la scelta della base di numerazione non e' per nulla obbligatoria, ma convenzionale. Pertanto l'utilita' di questi esercizi si esaurisce quando tale coscienza e' acquisita: il ripeterli conduce soltanto a confusione alcuni alunni, che gia', per parte loro, hanno difficolta' nella manovra delle convenzioni abituali della numerazione.

6 - La nostre convenzioni per la rappresentazione dei numeri interi naturali non sono fondate soltanto sulla scelta della base di numerazione; una seconda scelta fondamentale e' quella che da' luogo alla cosiddetta convenzione posizionale. Con questa , una volta che siano state fissate certe figure convenzionali (le cifre) per rappresentare i primi interi, ogni numero e' rappresentato da una somma di multipli di potenze della base: tale somma si rappresenta mettendo le cifre in un determinato ordine, ed il numero rappresentato da una cifra dipende dal posto che la cifra stessa ha nella successione di simboli che si scrive. Cosi' per esempio con il simbolo "237" noi rappresentiamo il numero che si ottiene dalla somma:

$$2x100 + 3x10 + 7x1.$$

Questa convenzione rende necessaria l'utilizzazione di un simbolo per indicare lo zero. Non stiamo qui a ricordare tutti i vantaggi e le possibilita' offerte dalle due convenzioni che abbiamo ricordato; osserviamo soltanto che per esempio la numerazione romana e la numerazione greca facevano a meno dello zero.

Come e' noto, le nostre convenzioni permetttono di rappresentare con rapidita' e comodita' dei numeri comunque grandi; esse inoltre , come vedremo, permettono anche di rappresentare con comodita' e sicurezza le operazioni sui numeri ; e questi due grandissimi vantaggi giustificano l'impiego universale che le nostre convenzioni hanno , nella pratica e nella scienza.

Pertanto e' necessario che la scuola si faccia carico di insegnare queste convenzioni, cosi' che il loro impiego sia preciso e spedito; il che comporta anche, come vedremo, la necessita' di memorizzare i risultati di certe operazioni elementari, e di rendere quasi automatica la lettura, la scrittura e l'esecuzione delle operazioni non elementari.

Occorre tuttavia ricordare che sempre di convenzioni si tratta ; e che pertanto non si puo' escludere che , per certi scopi, se ne utilizzino di diverse: si tratta in ogni caso di simboli per rappresentare dei concetti. Questi ultimi sono i soli personaggi importanti: i simboli che li rappresentano possono essere inventati ed adottati a seconda della comodita' e dell'abitudine, ma la loro adozione ed il loro uso non sono necessari in senso assoluto.

Si potrebbe ripetere in questo caso cio' che Dante fa dire ad Adamo (Paradiso, canto XXVI,130):

Opera naturale e' ch'uom favella
Ma cosi' o cosi' natura lascia
Poi fare a voi secondo che v'abbella.

In altre parole : e' necessario usare dei simboli per comunicare i nostri concetti, ma la scelta di questi simboli non e' stabilita dalla natura.

7 - Le riflessioni che precedono mirano a mettere in luce una proprieta' che il linguaggio matematico possiede, in confronto con i linguaggi naturali: a proposito di questi abbiamo gia' parlato della ridondanza, cioe' del fatto che in generale si usano dei simboli in numero superiore a quello strettamente necessario per comunicare un messaggio o per esprimere un determinato pensiero. Aggiungiamo ora che il messaggio, per essere compreso con chiarezza e precisione, suppone quasi sempre un contesto o una certa cultura (o, meglio, un certo insieme di conoscenze) in chi legge o ascolta. La mancanza di questa cultura conduce spesso a distorsioni nella comprensione , da parte di chi non conosce tutti i sensi in cui un determinato vocabolo puo' essere impiegato.

Ricordiamo l'esempio addotto dalla Baruk, alla quale un ragazzo aveva risposto che un esagono ha 4 lati; egli deduceva questa sua opinione da un messaggio della radio, in cui si parlava di "venti dai 4 lati dell'esagono". In questo caso il termine "esagono" era utilizzato per dire "Francia" (come e' d'uso talvolta in quel Paese) e non, ovviamente, come termine della geometria razionale. In italiano si potrebbe pensare ad una notizia in cui si parla di "quattro lati dello Stivale", ma anche questa espressione non autorizzerebbe a pensare che uno stivale abbia 4 lati. Ma chi non conoscesse l'abitudine di usare il termine "stivale" per indicare l'Italia l'espressione potrebbe portare a qualche legittima perplessita' o sarebbe occasione di illazioni errate.

Analoghe considerazioni si possono fare a proposito di frasi o espressioni sgrammaticate, o smozzicate , le quali permettono tuttavia di dedurre qualche messaggio ragionevole, facendo appello alle nozioni che gia' si posseggono, ad una buona dose di inventiva e ad un rapido confronto tra le molte interpretazioni possibili.

Per esempio, in Valle Intelvi fanno bella mostra di se' dei cartelli cosi' concepiti:

AMMINISTRAZIONE PROVINCIALE DI COMO
ZONA
DIVIETO SEGUGIO
E CACCIA ALLA LEPRE
LEGGI VIGENTI.

Con un certo disagio si arriva a dedurre che l'amministrazione provinciale di Como, in applicazione delle leggi vigenti, proibisce nella zona cosi' delimitata l'impiego dei cani segugi e la caccia alla lepre.

Di analoga chiarezza sono spesso certi titoli di giornale; ricordiamo per esempio il seguente:

LO LASCIA PER UN ALTRO
DISPERATO LA UCCIDE.

Qui un certo lavorio di interpretazione conduce ad identificare una storia drammatica con tre personaggi: una lei e due lui, diciamoli A e B: il lui A ha ucciso lei, che l'aveva lasciato per il lui B.

Altre volte l'interpretazione del titolo richiede ulteriori informazioni, oltre ad uno sforzo di interpretazione; si consideri il seguente esempio (Il Giornale. 23 sett. 1990) :

L'ADDIO AL VELENO DI CAPONNETTO:

PER ANNI HO VISSUTO IN TRINCEA
MA LI' NON S'E' MAI VISTO UN POLITICO.

La prima riga lascia adito a varie interpretazioni perche' non si capisce a prima vista se qualcuno ha dato l'addio ad un veleno che e' di proprieta' di un signor Caponnetto, oppure se lo stesso signore ha dato l'addio al veleno. La lettura attenta dell'articolo porta a concludere che il dott. Antonino Caponnetto, magistrato di Firenze, giunto al termine della sua carriera, ha pronunciato un discorso d'addio che e', per cosi' dire, condito con il veleno.

Qui, oltre all'oscurita' riguardante i personaggi coinvolti, vi sono anche i traslati : il veleno e la trincea (per indicare il pericoloso lavoro del giudice).

Equivoci di questo tipo, spesso grotteschi, non potrebbero verificarsi con il linguaggio matematico: questo ha la caratteristica di essere univoco e preciso, e di non aver bisogno di contesti per la sua interpretazione: una volta che e' stato spiegato il significato di un simbolo convenzionale , tale significato non cambia nel corso di una medesima esposizione, o da una espressione ad un'altra.

Tuttavia questa precisione e questa univocita' si accompagnano ad un'altra caratteristica, che a volte risulta scomoda per qualche soggetto: la formula matematica non tollera errori: se non sono rispettate tutte le regole e le prescrizioni che reggono il linguaggio matematico, una espressione puo' non avere significato; oppure, se si saltera' o si cambiera' anche uno solo dei simboli che costituiscono una espressione, il significato di questa cambia.

Per queste ragioni il linguaggio matematico si presenta come particolarmente preciso ed univoco; ma rimane difficile da impiegare. E questa sua caratteristitca lo rende spesso poco simpatico o addirittura sgradito ed incomprensibile per molti soggetti, che possono possedere anche notevoli doti intellettuali.

8 - Ci siamo soffermati, sommariamente e brevemente, su alcune caratteristiche del linguaggio matematico in generale.

Vogliamo ora prendere in considerazione i primi momenti nei quali i discenti entrano in contatto con questo linguaggio, e vogliamo riflettere sulle eventuali difficolta' di apprendimento e sulle eventuali strategie didattiche per superarle.

Si puo' osservare che il primo incontro del giovanissimo discente con il linguaggio matematico avviene in occasione della utilizzazione del numero intero naturale per rappresentare un concetto collegato con gli insiemi finiti.

Osserviamo di passaggio che non abbiamo finora fatto riferimento ai concetti ed alla nomenclatura della teoria ingenua (primitiva ed acritica) degli insiemi: quella che viene abitualmente indicata con il termine di "Insiemistica".

Questo nostro comportamento ha il suo fondamento nella nostra convinzione che non sia necessario impartire esplicitamente queste nozioni, per quanto elementari esse siano, ai giovanissimi, ne' sia utile imporre l'impiego del linguaggio della insiemistica.

A nostro parere infatti la fortuna di questa moda e' dovuta sostazialmente ad un equivoco: questo consiste nella convinzione che i concetti piu' fondamentali e piu' semplici siano anche i piu' facili da apprendere. L'analisi, che conduce ad identificare nel concetto di insieme uno degli elementi fondamentali del pensiero (e non solo del pensiero matematico) e' frutto di un lavorio secolare di indagine e di approfondimento. Ma per secoli l'aritmetica e' stata insegnata ed imparata con un apprendimento spontaneo dei concetti fondamentali dell'insiemistica, senza che si insistesse per rendere questi concetti esplicitamente presenti alla coscienza dei discenti, e senza che si pretendesse l'uso da parte di questi del vocabolario specializzato. A nostro parere inoltre il giovanissimo discente e' gia' costretto a confrontarsi con tante convenzioni di linguaggio, con tanti concetti nuovi, e' tenuto a rispettare tante regole convenzionali, che l'imporre anche un vocabolario non strettamente necessario rischia di sovraccaricare la mente e forse anche di distrarla dalle cose che veramente importano.

Cio' tuttavia non comporta la inutilita' per l'insegnante di conoscere l'insiemistica, e di dominarne il vocabolario: si vuole soltanto osservare che il passaggio per l'insiemistica non pare un momento obbligato per l'insegnamento della matematica elementare; e di piu' si vuole evitare ogni imposizione di vocabolario tecnico al giovane discente, che gia' deve impadronirsi di molte convenzioni e delle loro regole.

9 - Abbiamo detto che il primo incontro del discente con la matematica elementare e' dato dalla utilizzazione del numero naturale intero. Abbiamo anche detto che il giovanissimo discente gia' possiede qualche vocabolo che denota i numeri corrispondenti ad insiemi poco numerosi: coppie , terne e cosi' via. Il primo compito della scuola e' di arricchire questo vocabolario, facendo vedere che ad ogni insieme finito (cioe' ad ogni insieme materialmente dato o materialmente assegnabile) corrisponde un numero naturale , e che tale numero e' un concetto astratto che corrisponde ad una intera classe di insiemi, i quali possono essere posti in corrispondenza biunivoca tra loro; quattro sono gli evangelisti, quattro i semi delle carte, quattro i punti cardinali, quattro le gambe della sedia, quattro i cavalieri dell'Apocalisse, ecc.

In altre parole, il numero intero naturale nasce dalla costruzione di un concetto che e' l'astratto della classe di insiemi i quali corrispondono biunivocamente tra di loro.

Anche in questo caso riteniamo che il maestro debba essere ben conscio di questo fatto, ma che non sia utile insegnare al discente tutta la procedura con cui il numero viene costruito, e costringerlo ad utilizzare il vocabolario insiemistico corrispondente (per esempio fargli imparare e dire che due insiemi sono equipotenti); pare a noi che queste cose siano cosi' naturali che non occorre insistere nella riflessione su di esse, rischiando di far sospettare ignote complicazioni, o ingombrando la memoria con un vocabolario tecnico troppo pesante per le menti infantili.

Piuttosto pensiamo che sia utile richiamare l'attenzione sul fatto che, mediante il numero, gli insiemi sono univocamente e chiaramente determinati: cosi' le designazioni quantitative del linguaggio comune, per esempio quelle che si ottengono dicendo che gli elementi di un insieme sono "tanti " oppure sono "pochi", sono superate in chiarezza ed efficacia dall'impiego del numero che non lascia adito a valutazioni sfumate e confuse. Verrebbe cosi' sottolineata da una parte la contiguita' del linguaggio matematico col linguaggio comune, e dall'altra parte la maggiore potenza del linguaggio matematico nella designazione e nella espressione di certi concetti che il linguaggio comune lascia in ombra o designa soltanto genericamente.

10 - Abbiamo cercato di mettere in luce le possibilita' offerte dal linguaggio matematico per designare certe qualita' degli insiemi finiti; ma la potenza del linguaggio matematico non si ferma qui . Infatti la circostanza piu' importante consiste, in questo ordine di idee, nel fatto che il linguaggio matematico consente non soltanto di designare chiaramente ed univocamente gli insiemi, ma anche di descrivere le manipolazioni che noi eseguiamo su di essi, e di prevederne i risultati senza ulteriori osservazioni o manipolazioni

Per comprendere meglio cio' che intendiamo dire, osserviamo che il numero naturale puo' essere utilizzato in vari modi : per esempio nelle citta' spesso le linee tramviarie sono distinte tra loro con numeri . Ma questo impiego del numero fornisce ben poche informazioni ulteriori sugli enti designati: non e' infatti detto che la linea di tram numero 10 abbia percorso doppio di quello della linea numero 5.

Un impiego piu' interessante del numero si incontra con l'abitudine di designare con numeri i portoni delle vie cittadine: per esempio in certe citta' i numeri pari oppure dispari sono dati a portoni che stanno su marciapiedi opposti; in questo modo, chi ricerca un portone del quale conosce il numero e' aiutato nella sua impresa.

Ma l'utilita' del linguaggio matematico si rivela in pieno quando si osservi che ad una operazione concreta sugli insiemi, e precisamente all'operazione di unione di insiemi non aventi elementi comuni, corrisponde una operazione sui numeri corrispondenti agli insiemi stessi. Questa operazione sui numeri si chiama, come e' noto, "addizione" oppure anche (forse meno propriamente) "somma".

Essa permette di conoscere esattamente e sicuramente il risultato della operazione eseguita sugli insiemi; e cio' senza che sia necessario eseguire un conteggio degli elementi dell'insieme che risulta dalla operazione di riunione.

A ben guardare, incontriamo qui per la prima volta un fatto che e' di estrema importanza: il fatto che si possa, operando sui concetti e sui loro simboli, dominare completamente la conoscenza di una realta' materiale. In questo senso troviamo qui una prima giustificazione di cio' che abbiamo detto parlando della matematica come chiave di lettura della realta'.

Per convincersi ulteriormente della potenza del linguaggio matematico e della sua superiorita' sul linguaggio comune (che ci da' una designazione sfumata ed imprecisa) proviamo a considerare cio' che avverrebbe se ci limitassimo e ci accontentassimo delle designazioni "tanti" e "pochi".

Utilizzando il simbolo abituale dell'insiemistica " $\cup$ " per indicare l'operazione di unione, si potrebbe scrivere la seguente tavola di operazioni:

tanti $\cup$ tanti = tanti

tanti $\cup$ pochi = tanti;

ma ovviamente non potremmo assegnare un risultato all'operazione:

pochi $\cup$ pochi

perche' puo' benissimo avvenire che, riunendo due insiemi, ognuno dei quali e' costituito da pochi elementi, si ottenga un insieme costituito da tanti.

Anche in questo caso abbiamo utilizzato il vocabolario dell'insiemistica, con il termine "unione"; ma non riteniamo utile introdurre il vocabolo (come termine tecnico) ed il corrispondente simbolo di operazione, almeno in un primo tempo. Pensiamo infatti che il concetto dell'operazione sia abbastanza chiaro a qualunque mente, e che la conoscenza intuitiva dell'operazione stessa sia sufficiente per gli scopi che ci interessano qui: cioe' per sottolineare l'essenziale parallelismo tra l'operazione astratta sui concetti e l'operazione materiale.

11 - Abbiamo detto che il parallelismo tra le operazioni concrete sugli insiemi e quelle astratte sui concetti numerici giustifica la nostra convinzione, che la matematica sia una chiave di lettura della realta'.

Si presenta a questo punto la necessita' di stabilire delle procedure per costruire le rappresentazioni sui numeri che a loro volta rappresentano le operazioni materiali su insiemi finiti. Ovviamente tali procedure sono strettamente legate alla convenzione scelta per rappresentare i numeri , e possono quindi diversificarsi, a seconda della scelta fatta.

Occorre infatti tener presente la distinzione di grado e di importanza che deve essere fatta tra le LEGGI dell'operazione di somma e le REGOLE che conducono ad esprimere tale operazione , quando siano state scelte determinate convenzioni di rappresentazione.

Ovviamente le leggi dell'operazione di somma sono dettate da quelle dell'operazione di unione tra insiemi: non stiamo qui a giustificare o (peggio) a cercare di dimostrare tali leggi, che accettiamo come date dall'intuizione fondata sull'osservazione di casi concreti: infatti la dimostrazione generale delle leggi stesse richiederebbe una trattazione ad una profondita' che qui non e' consentita. Le leggi dell'operazione di riunione tra insiemi sono abitualmente presentate parlando di "proprieta' commutativa" e di " proprieta' associativa" dell'operazione di riunione. A queste leggi corrispondono altrettante leggi dell'operazione di somma, leggi che sono presentate con le stesse espressioni linguistiche.

Indicati con a, b, c, ... dei numeri qualunque, le due proprieta' vengono presentate con le formule abituali:

(1) $a+b = b+a$ (proprieta' commutativa)

(2) $a+(b+c) = (a+b) +c$ (proprieta' associativa).

Le formule sono state scritte con simboli non determinati a, b , c , proprio per far vedere che esse sono valide per tutti i numeri; si dice anche spesso che tali formule esprimono delle "proprieta' formali" dell'operazione di somma.

Con questa espressione si vuole indicare cio' che abbiamo gia' detto, e cioe' che la loro validita' non dipende dai numeri coinvolti, sui quali operiamo, ma dipende dalla natura dell'operazione che si esegue.

Notiamo di passaggio che la formula (2) porta come conseguenza che si possa indicare semplicemente con il simbolo:

$$a+b+c$$

la somma di tre numeri, senza precisare quale delle due operazioni indicate sia eseguita per prima.

Rileviamo inoltre che nella stessa formula (2) vengono utilizzate le parentesi secondo una convenzione di scrittura che e' adottata in tutti i discorsi matematici di questo tipo; osserviamo a questo proposito che, anche in questo caso, si tratta di notazioni convenzionali, che non sono imposte dalla natura delle cose, ma che ci appaiono quasi naturali per l'abitudine che abbiamo del loro uso.

Quando si scelgano le abituali convenzioni per rappresentare i numeri, le operazioni di somma sono eseguite abitualmente con certe procedure che sono fondate essenzialmente sulle proprieta' formali ricordate poco fa: infatti il mettere in colonna, le regole dei riporti ecc. sono fondate sulle proprieta' associativa e commutativa, come si vede facilmente su esempi; questa procedure, ripetiamo, sono molto utili ed efficaci, ma non sono obbligatorie; operando in altro modo per rappresentare i numeri, potremmo anche escogitare altre procedure per eseguire le somme ; otterremmo cosi' altre regole, ma sempre dovremmo rispettare le leggi fondamentali della addizione.

Dal punto di vista concettuale non sarebbe necessario aggiungere altre parole a quelle che abbiamo gia' scritto; ci limitiamo ad osservare che il mettere ad esecuzione le regole abituali per l'operazione di somma richiede ovviamente che l'alunno memorizzi la tavola di addizione dei numeri rappresentati con una sola cifra; inoltre e' utile che siano anche memorizzate le possibili decomposizioni del 10 in due addendi .

Queste memorizzazioni sono ovviamente utili per l'esecuzione spedita dei calcoli, ma - ripetiamo - hanno un carattere squisitamente strumentale e non essenziale; in particolare il fatto che qualche discente inciampi su questi espedienti pratici e' del tutto diverso dal fatto che egli abbia o non abbia compreso il significato della operazione.

Tuttavia vale la pena di osservare quanto grande sia stata l'importanza di un avvenimento storico, che ha avuto conseguenze fondamentali per la scienza: intendiamo parlare dell'introduzione in Occidente delle convenzioni arabo-indiane per rappresentare i numeri naturali, introduzione che si deve al matematico pisano Leonardo Pisano detto il Fibonacci. Le convenzioni che egli ha introdotto in occidente e che ha insegnato ai suoi contemporanei sono ancora oggi adottate da tutti i popoli civili per rappresentare i numeri; esse furono accettate allora, e sono ancora oggi accettate perche'- come abbiamo gia' detto -

consentono di rappresentare in modo comodo, chiaro ed uniforme dei numeri comunque grandi , ma sopratutto perche' permettono di eseguire in modo semplice e chiaro le operazioni sui numeri. Per convincersi di questi due fatti basterebbe tentare di costruire delle regole per eseguire la somma di due o tre numeri utilizzando le convenzioni romane: si incontrerebbero quasi subito tali difficolta' e complicazioni che renderebbero molto difficile, a noi che siamo abituati alla chiarezza ed alla speditezza delle nostre regole, il raggiungere il risultato. E questo rende ancora piu' grande la nostra meraviglia e la nostra ammirazione, quando si pensi ai calcoli numerici che i matematici antichi hanno condotto a termine senza avere i nostri strumenti per rappresentare i numeri e le operazioni su di essi.

12 - Abbiamo visto che l'operazione di somma tra due numeri rende perfettamente l'operazione di riunione tra due insiemi finiti che non hanno elementi in comune : il parallelismo tra le due operazioni (quella concreta, materiale, e quella sui concetti astratti) e' tale che - come abbiamo gia' detto - l'aritmetica permette di prevedere il risultato delle operazioni e delle manipolazioni materiali senza che sia necessario eseguire altre operazioni o altri conteggi.

Analoghe considerazioni possono essere fatte sulle altre operazioni sugli insiemi, operazioni che spesso danno luogo a qualche difficolta' di comprensione da parte di alcuni discenti.

La prima operazione che si incontra, dopo la riunione, e' quella concreta che si realizza asportando da un insieme un suo sottoinsieme , che non coincida con lui. Come e' noto, questa operazione materiale viene rappresentata con una operazione sui numeri che e' chiamata "sottrazione", e che si presenta quasi altrettando facile da capire come l'addizione.

Tuttavia la esecuzione pratica della operazione sui numeri presenta spesso qualche difficolta' ai discenti, forse perche' le procedure adottate non corrispondono in modo trasparente alla operazione materiale tra due insiemi; ne consegue che la procedura per la sottrazione viene spesso memorizzata come se fosse una specie di magia che giunge al risultato senza che si comprenda bene il perche' di questo fatto.

Le difficolta' di calcolo che la sottrazione presenta sono anche rese piu' gravi da alcune circostanze su cui vorremmo soffermarci. La prima potrebbe essere esposta ricordando cio' che abbiamo detto sopra, quando abbiamo affermato che le nostre convenzioni di rappresentazione dei numeri rendono necessaria la presenza dello zero; presenza che, a stretto rigore, non e' affatto necessaria (come e' provato dal fatto che la numerazione romana e greca la ignoravano) ma che diventa necessaria se si vogliono adottare le nostre notazioni dei numeri. Nel caso della sottrazione, la esistenza dello zero viene collegata con la realta' facendo riferimento ad una operazione concreta di asportazione; operazione che non si limita ad asportare un sottoinsieme di un insieme dato, ma lo asporta tutto. Talvolta si vede rappresentato concettualmente il risultato con l'introduzione dell'insieme vuoto, in altri casi il fatto viene presentato come una convenzione di linguaggio : invece di dire che in un certo recipiente non vi sono piu' elementi di un dato insieme si dice che ci sono zero elementi: pertanto si costringono i discenti ad un sforzo mentale per estendere il significato del concetto di numero : finora questo concetto e' servito a rappresentare gli insiemi, materialmente dati: e se non vi erano elementi non si contavano, perche' l'insieme non era considerato esistente. Ora invece si educano i discenti a dire che gli elementi che non si possono contare (perche' non ci sono) sono rappresentati anche loro da un numero speciale. Sara' superfluo osservare che questa acrobazia mentale, che a noi sembra tanto naturale, puo' presentare delle difficolta' per qualche mente che non ha spiccato il gusto della convenzione e della astrazione; resta comunque valido il sospetto che le cose non siano comprese appieno anche da quei soggetti che danno l'impressione di ripetere agevolmente le parole che hanno sentito pronunciare.

13 - L'operazione di sottrazione, concettualmente molto chiara, presenta anche una seconda difficolta' per certe menti, per il modo in cui essa viene presentata; precisamente perche' essa e' presentata come la procedura per risolvere un problema che si usa formulare nel modo seguente :"trovare cio' che si deve aggiungere ad un certo numero dato per trovarne un altro, pure dato " . In formule il problema si presenterebbe come la soluzione dell'equazione:

$$a + x = b.$$

Osserviamo qui che l'operazione, presentata sotto questa forma, presenta delle difficolta' logiche del tutto nuove rispetto alla presentazione precedente; oseremmo dire che l'equazione scritta mette in moto il procedimento logico che gia' i Greci avevano identificato come la procedura di analisi: infatti, supponendo che il numero x esista, esso DEVE essere tale che, addizionato ad a, dia b. Questo DEVE e' ovviamente il risultato di un ragionamento; e questo, per elementare che sia, costringe il discente ad una operazione puramente logica, di livello superiore a quello a cui si trova l'immaginare lo scorporo di un sottoinsieme da un insieme dato.

LETTURA TRASVERSALE DEI PROGRAMMI DI MATEMATICA PER LE SCUOLE ELEMENTARI.
PARTE SECONDA. GRANDEZZE, MISURE, NUMERI RAZIONALI.
RISERVATO AGLI INSEGNANTI.

1 - Abbiamo visto che il primo incontro con la matematica del giovane discente delle scuole elementari lo conduce a costruire i numeri naturali, ad apprendere le operazioni aritmetiche, ed ad utilizzare questo simbolismo per la conoscenza degli insiemi finiti, e delle operazioni su di essi.

Il secondo incontro con la matematica del giovane discente lo porta a confrontarsi con il concetto di grandezza, e con l'insieme dei numeri razionali.

Come abbiamo fatto finora, partiremo dalle esperienze quotidiane e dal linguaggio comune, per costruire gradualmente un insieme di simboli e di operazioni. Ricordiamo che il contenuto delle riflessioni che faremo qui e' destinato agli insegnanti; non e' detto che tutto cio' che diremo debba o possa essere portato direttamente nelle aule scolastiche. Ma riteniamo utile che l'insegnante abbia una visione molto piu' ampia rispetto ai contenuti che egli porta in classe.

Vi e' tutta una serie di esperienze elementari che hanno condotto alla costruzione di un concetto fondamentale, per la vita quotidiana e per la tecnica e la scienza; tale concetto e' quello di grandezza, e l'insieme di simboli matematici con i quali esso viene rappresentato e conosciuto e' quello dei numeri razionali.

Richiamiamo anzitutto un insieme di esperienze comuni e di procedure quotidiane: quando poniamo due oggetti sui due piatti di una bilancia e questa rimane in equilibrio, si suol dire che i due oggetti hanno "pesi uguali" o anzi, addirittura, che essi hanno "lo stesso peso": quando una medesima quantita' di liquido viene contenuta da due recipienti, anche di forma diversa, si suole dire che i recipienti hanno "capacita' uguali" o anche addirittura che essi hanno "la stessa capacita'"; quando due automobili compiono un medesimo percorso, ed i due viaggi hanno uguali durate, si suol dire che le due automobili hanno tenuto "velocita' uguali" o anche che esse hanno tenuto "la stessa velocita'". Quando, per pavimentare due stanze di forma diversa, si impiega lo stesso numero di piastrelle, si suole dire che le due stanze hanno "aree uguali" o anche addirittura che esse hanno "la stessa area"; quando due regoli rigidi possono essere accostati in modo che le estremita' coincidano si suole dire che i due regoli hanno "lunghezze uguali" o anche addirittura che essi hanno " la stessa lunghezza".

Prima di proseguire avvertiamo qui che le espressioni di cui ci serviremo in seguito appartengono ad un vocabolario che non e' uniforme presso tutti i trattatisti che si occupano di questi argomenti: per esempio qualche Autore identifica addirittura la lunghezza di un segmento rigido con il segmento stesso, oppure definisce come "distanza tra due punti" il segmento che ha gli stessi punti come estremi. Noi invece preferiamo chiamare "distanza tra due punti" la lunghezza di tale segmento. Ovviamente non si puo' imporre o proibire l'impiego di una determinata parola, o sentenziare sbrigativamente che una certa espressione e' sbagliata; le cose veramente importanti sono anzitutto che la scelta delle denominazioni sia chiaramente enunciata e presentata, perche' tale scelta puo' avere un certo margine di convenzionalita', che puo' provocare qualche dubbio o qualche incertezza in chi legge o ascolta; in secondo luogo e' necessario che un Autore rimanga coerente alle scelte fatte, una volta che egli le ha chiaramente annunciate.

Noi preferiamo qui distinguere chiaramente tra un segmento e la sua lunghezza, perche' ci pare che questa distinzione aiuti a comprendere le strutture teoriche che costruiremo e i loro fondamenti sperimentali. Ma - ripetiamo - non intendiamo con questo imporre le nostre scelte agli altri.

2 - Si notera' che, in tutto cio' che precede, abbiamo parlato di peso, di area, di lunghezza, di velocita', ma non abbiamo detto che cosa sia il peso, che cosa sia la lunghezza, ecc. Qualcuno potrebbe ora porsi il problema di definire i concetti di cui abbiamo parlato: per esempio puo' avvenire che ci si domandi la definizione di lunghezza, di peso, di area, di velocita' ecc. . Infatti le esperienze a cui ci siamo riferiti poco sopra conducono soltanto a verificare, con una tecnica precisa, quando due oggetti abbiano lo stesso peso, quando due recipienti abbiano la stessa capacita', quando due regoli abbiano la stessa lunghezza ecc.

Incontriamo qui un caso tipico di costruzione di un concetto astratto, cioe' di un concetto che puo' essere valido per molti oggetti materialmente distinti tra loro. Qualora si voglia costruire una frase che soddisfi coloro i quali desiderano pronunciare delle proposizioni che suonano come delle definizioni, si potrebbero svolgere le seguenti argomentazioni: consideriamo per esempio il caso dei poligoni piani convessi; se due poligoni cosiffatti possono essere decomposti in un numero finito di parti, in modo tale che ogni parte in cui uno dei poligoni e' decomposto puo' essere sovrapposta, con un trasporto rigido, ad una parte in cui e' decomposto l'altro, si suol dire che i due poligoni sono "equiscomponibili".

Allora si puo' decidere che la frase "due poligoni (piani convessi) hanno la stessa area" significhi soltanto che i due poligoni sono equiscomponibili; oppure si puo' scegliere di dire che "l'area di un poligono e' cio' che il poligono stesso ha in comune con tutti quelli che sono equiscomponibili con lui". A questo livello, non ci pare che sia possibile comporre altri discorsi che pretendano di precisare ulteriormente che cosa sia questo "cio'" di cui abbiamo parlato.

Considerazioni analoghe si potrebbero svolgere a proposito della lunghezza di un segmento, della capacita' di un recipiente, del peso di un oggetto ecc.

Sempre a questo proposito, osserviamo che la circostanza che ci pare piu' importante nelle procedure esposte poco sopra consiste nella esistenza di una tecnica precisa e costante per verificare che tra due oggetti sussiste una certa relazione: nel caso dei corpi pesanti, la tecnica consiste nel porre due corpi sui due piatti di una bilancia; nel caso di due segmenti rigidi la tecnica consiste nell'accostarli per verificare se le estremita' possono coincidere ecc.

I concetti di cui abbiamo parlato, e che vengono costruiti nel modo a cui abbiamo accennato, cioe' peso, lunghezza, area, capacita', velocita', ecc. forniscono degli esempi di CLASSI DI GRANDEZZE OMOGENEE.

Le tecniche precise di cui abbiamo detto permettono di verificare se tra due grandezze della stessa classe sussiste una relazione che chiameremo "di equivalenza".

Per tale relazione valgono certe proprieta', le quali vengono abitualmente presentate con le frasi seguenti: Ogni grandezza e' equivalente a se stessa (proprieta' riflessiva dell'equivalenza). Se una grandezza e' equivalente ad un'altra, anche la seconda e' equivalente alla prima (proprieta' simmetrica dell'equivalenza). Se due grandezze sono equivalenti ad una terza, allora sono anche equivalenti tra loro (proprieta' transitiva dell'equivalenza).

3 - Le considerazioni che abbiamo svolto poco sopra a proposito del problema della definizione delle varie grandezze, appartenenti a classi di grandezze omogenee (peso, area, lunghezza, velocita', capacita' ecc.) si possono ripetere a proposito del problema della definizione del concetto di "grandezza" in generale.

In analogia con quanto abbiamo gia' fatto, noi qui non daremo una definizione mediante una frase del tipo : "Grandezza e' ...." oppure: "Si chiama grandezza cio' che ....".

Sappiamo che in alcuni libri si leggono delle frasi di questo tipo, che vengono presentate come definizioni del concetto di grandezza: una frase del genere e' per esempio la seguente: "Grandezza e' tutto cio' che puo' crescere o diminuire".

Questa frase e' attribuita al grande matematico svizzero del secolo XVIII Leonardo Eulero. Tuttavia essa non puo' essere considerata come la definizione logica rigorosa del concetto di grandezza, perche' da essa non si possono trarre logicamente tutte le proprieta' che appartengono a quegli enti che qui considereremo come grandezze. Effettivamente cio' che si potrebbe dire di quella frase e' che essa e' troppo generica: infatti si potrebbe applicare per esempio anche al mal di testa. Sopratutto da questa frase non si possono dedurre le proprieta' che permettono di rappresentare le grandezze mediante numeri, attraverso l'operazione di misura.

Ripetiamo che, come abbiamo gia' detto sopra (N. 1), non si puo' imporre o proibire ad alcuno l'impiego di certi termini, e quindi non si puo' sbrigativamente giudicare il loro impiego come erroneo se non e' fatto con il rispetto delle convenzioni da noi seguite. Tuttavia noi preferiamo seguire qui la strada che porta alla precisazione del significato dei termini attraverso il loro impiego; questo modo di procedere conduce alle definizioni che, nella matematica moderna, vengono chiamate "definizioni implicite" oppure anche "definizioni d'uso"; questo ultimo nome indica chiaramente che il significato di un termine viene precisato dall'impiego che se ne fa, e non dalla sua definizione formale.

Questo procedimento logico e' inevitabile, quando si tratti di precisare il significato di certi termini che vengono considerati come primitivi; termini cioe' che, in una determinata trattazione, non possono essere definiti con riferimento ad altri, considerati come gia' noti. E d'altra parte e' necessario che si faccia una scelta dei termini da considerarsi come primitivi, perche' chiaramente non e' possibile definire tutti i termini che si usano mediante una definizione formale: occorre arrestarsi ad un certo punto, e considerare come noti i significati di alcuni termini, significati che sono appresi con procedure diverse dalla definizione formale. Gli sviluppi del seguito chiariranno ulteriormente cio' che abbiamo datto finora. Qui ci limitiamo ad osservare che la pratica didattica, consistente nel costringere i giovani alunni a ripetere delle frasi che si credono definizioni di certi concetti, non ci pare molto costruttiva; inoltre ci pare almeno imprudente giudicare dell'apprendimento di certi concetti dalla sola ripetizione di certe frasi; infatti la memoria del giovane ritiene con una certa facilita', e ripete fedelmente, anche delle frasi che non hanno alcun senso concreto; fortunatamente tali frasi sono anche dimenticate con la stessa facilita'. Ma l'accertamento che un certo concetto e' posseduto e dominato e' molto piu' difficile della verifica puramente esteriore che una certa frase e' ripetuta fedelmente.

4 - Accettiamo dalla esperienza comune che sulle grandezze di cui parliamo si possano eseguire certe operazioni che hanno certe proprieta', di cui parleremo subito.

La prima operazione che stiamo considerando viene chiamata somma tra grandezze. Occorre qui fare attenzione a due circostanze, che possono dar luogo a qualche difficolta': anzitutto una operazione viene indicata con lo stesso termine che viene usato per indicare il suo risultato: infatti il risultato dell'operazione di somma di due grandezze viene pure chiamato somma delle due. Cio' non avviene per esempio con i numeri naturali, perche' in quel caso si puo' convenire di usare il termine "addizione" per l'operazione, ed il termine "somma " per il suo risultato. In secondo luogo si osserva che l'operazione tra grandezze viene designata con un termine che viene usato a proposito dei numeri naturali. A rigore, questo modo di fare potrebbe portare a confusione; ma noi lo adotteremo, perche' e' ormai entrato nelle abitudini generali: occorre tuttavia fare attenzione, e badare al contesto dei discorsi che si fanno, per evitare di confondere tra la somma di due numeri e la somma di due grandezze.

Come vedremo subito, anche il simbolo convenzionale che si adotta per indicare l'operazione di cui stiamo parlando puo' dar luogo a confusione: precisamente noi indicheremo le grandezze di una classe di grandezze omogenee con lettere maiuscole dell'alfabeto latino:

$$A, B, C, ...X, Y, Y \ ....$$

ed indicheremo l'operazione di somma interponendo le crocetta "+" tra i simboli delle due grandezze sulle quali operiamo. Cosi', per indicare che una grandezza C e' la somma delle due grandezze A e B, scriveremo:

$$C = A + B \tag{1}$$

e leggendo, come d'abitudine, " C e' uguale ad A piu' B".

Qualche Autore, per indicare la somma tra grandezze, usa un simbolo lievemente diverso da quello usato per indicare la somma tra numeri: per esempio qualche Autore usa una crocetta circondata da un circoletto per indicare la somma tra grandezze; ancora una volta ripetiamo che non e' possibile imporre ne' proibire delle convenzioni, ne' giudicare sbrigativamente in errore chi utilizza delle convenzioni diverse dalle nostre. La scelta di questi Autori ha il vantaggio di facilitare la distinzione delle due operazioni di somma ; ma noi qui preferiamo non moltiplicare le notazioni convenzionali, raccomandando tuttavia l'attenzione ai possibili diversi significati di un medesimo simbolo; significati che possono venire distinti tra loro con riferimento al contesto del discorso che si svolge.

L'operazione di somma di due grandezze viene realizzata in moltissimi modi nella pratica, e fa parte dell'esperienza e della vita quotidiana. Cosi', per esempio, se un oggetto, posto su un piatto di una bilancia, fa equilibrio con due altri oggetti posti sull'altro piatto, si suolo dire che "il peso dell'oggetto e' la somma dei pesi degli altri due che gli fanno equilibrio". Analogamente, due segmenti, trasportati rigidamente l'uno di seguito all'altro sulla stessa retta, vengono a costituire un terzo segmento, che viene detto abitualmente "somma" dei primi due, e del quale si dice pure che "ha una lunghezza che e' somma delle lunghezze dei primi due".

Analoghe esemplificazioni si possono costruire senza difficolta' per le altre grandezze di cui abbiamo parlato: per ogni classe di grandezze esiste una tecnica precisa (ovviamente diversa da una classe ad un'altra) che conduce a costruire la somma di due grandezze della classe.

Cio' che piu' interessa qui e' il mettere in evidenza le proprieta' di queste operazioni, proprieta' che noi daremo qui come conosciute dalla osservazione elementare dei risultati dei nostri comportamenti quotidiani sugli oggetti che noi manipoliamo.

Le proprieta' in discorso sono espresse dalle formule seguenti:

(2) $$A + B = B + A$$
(proprieta' commutativa della somma di grandezze)

(3) $$(A+B)+C = A+(B+C)$$
(proprieta' associativa della somma di grandezze).

Ovviamente nella formula (3) il significato delle parentesi e' quello abituale, che esse hanno sempre nella matematica in questi casi: esse indicano che l'operazione che viene indicata tra parentesi deve essere eseguita prima di quelle che sono indicate con simboli che stanno fuori dalle parentesi stesse.

Il sussistere della proprieta' associativa, espressa dalla (3), permette di indicare l'operazione di somma di piu' di due grandezze senza impiegare parentesi, con una formula del tipo della seguente:

(4) $$A + B + C .$$

Si osservera' che le formule (2) e (3) sono del tutto analoghe a quelle che esprimono delle proprieta' fondamentali della somma di due numeri; esse vengono chiamate "proprieta' formali" dell'operazione di somma; con questo termine, come abbiamo gia' visto, si vuole dire che le proprieta' stesse valgono quali che siano le grandezze interessate: esse infatti non sono proprieta' di queste ultime, ma bensi' dell'operazione di somma che si esegue su di esse.

In relazione alla operazione di somma di grandezze si introduce convenzionalmente, in ogni classe di grandezze, una "grandezza nulla" o anche "grandezza zero", che viene indicata con il simbolo "O", analogo (ma non uguale) allo zero numerico.

Per questa grandezza si stabilisce che valga la seguente legge:

(5) $$A + O = A .$$

Si tratta di una estensione del concetto di grandezza, che e' analoga a quella che si opera con lo zero nel caso dei numeri; essa non e' affatto necessaria, ne' richiesta dalla logica; tuttavia la sua introduzione e' molto utile, perche' permette di scrivere le formule che esprimono le proprieta' delle grandezze con grande semplicita' ed uniformita'.

5 - La prima operazione tra grandezze, che abbiamo presa in considerazione finora, e' strettamente collegata con una seconda operazione, che viene chiamata "moltiplicazione di una grandezza per un numero naturale". Dagli sviluppi che seguiranno, si potra' dedurre che questa non e' tanto una operazione tra grandezze, ma si potrebbe chiamare piuttosto una operazione su grandezze.

Come al solito, i fondamenti di questa operazione si incontrano nella nostra condotta quotidiana, e nel linguaggio comune che la descrive: infatti in tutte le lingue piu' diffuse vi sono termini che indicano il doppio, il triplo, il quadruplo, il quintuplo,.... il decuplo ecc. di qualche cosa.

Rimanendo aderenti alla esperienza comune, questi vocaboli intendono indicare la grandezza che si ottiene sommando rispettivamente due, tre, quattro ...dieci grandezze tutte uguali tra loro.

Poiche' il linguaggio comune e' inadeguato da esprimere tutti i casi che si possono presentare, si adotta per questa operazione una notazione convenzionale di cui diremo subito. A tale scopo, nel seguito indicheremo con minuscole dell'alfabeto latino:

(1) a, b, c,.....n, m, ...p, q, r, s,......ecc.

dei numeri naturali. Data una grandezza A, la grandezza che si ottiene come somma di n grandezze uguali ad A viene abitualmente indicata con il simbolo:

(2) n*A oppure nxA oppure anche semplicemente con nA, leggendo con la frase :

"n per A" oppure "n volte A" oppure semplicemente" n A";

Questa grandezza viene anche chiamata "multipla di A secondo il numero n", oppure anche "il multiplo di A secondo n".

Con le considerazioni svolte, abbiamo quindi introdotto una operazione di moltiplicazione di una grandezza per un numero naturale, operazione che, partrende da una grandezza, produce una seconda grandezza, e che viene rappresentata simbolicamente in uno dei modi presentati in (2).

In questa formula, il numero naturale n viene anche chiamato "coefficiente numerico"; questo viene di solito scritto prima della grandezza, ma si conviene che la scrittura "A*n" oppure anche "An" abbia lo stesso significato della (2), anche se quest'ultima e' la forma piu' abitualmente accettata.

L'operazione di moltiplicazione di grandezze per numeri ha certe proprieta' formali che sono espresse simbolicamente dalle formule che ora scriveremo e commenteremo, ove necessario.

(3) $(n+m)A = nA + mA$
(proprieta' distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma di numeri).

Si osservi che nella (3) il segno "+", nel membro di sinistra dell'uguaglianza ha significato di somma di numeri, nel membro di destra ha significato di somma di grandezze.

(4) $n(A+B) = nA + nB$
(proprieta' distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma di grandezze.

(5) $n(mA) = (nm)A.$
(6) $n0 = 0$
(7) $0A = 0$
(8) $1A = A.$

6 - L'operazione di moltiplicazione di grandezze per numeri, che abbiamo introdotto poco sopra, ci conduce a considerare il numero naturale sotto una luce che si rivelera' molto utile: infatti abbiamo considerato la (2) nel N. precedente come la espressione simbolica di una operazione, eseguita su una grandezza A, operazione che ha come risultato una seconda grandezza: il multiplo di A secondo l'intero naturale n. Pertanto il numero n puo' essere considerato come un "operatore", il quale, applicato a qualche cosa (una grandezza, nella fattispecie), produce o indica, in generale, qualche altra cosa.

Il concetto di "operatore" viene applicato molto di frequente in matematica, in logica ed in altre discipline; esso verra' qui considerato come primitivo; quindi non cercheremo di darne una definizione formale, e ci limiteremo ad indicare con esempi il suo impiego.

Per esempio l'operatore "Padre di...", premesso al nome di un essere umano qualunque (escluso Adamo) indica un altro essere umano ben determinato; l'operatore "successivo di...." premesso al simbolo di un numero naturale qualunque indica un altro numero naturale ben determinato, e cosi' via.

In questa luce, le formule del precedente N.5 si possono considerare come esprimenti delle proprieta' dei numeri naturali considerati come degli operatori su classi di grandezze. Questo modo di vedere le cose ci permettera' di estendere il significato del termine "numero", finora limitato ai numeri naturali, ad altri concetti, i quali si presenteranno in modo spontaneo come operatori sulle grandezze.

7 - L'esperienza comune ci mostra che sulle grandezze che noi manipoliamo quotidianamente possiamo eseguire anche un'altra operazione oltre alle due che abbiamo finora preso in considerazione. Precisamente possiamo dividere (o immaginare di dividere) ogni grandezza in un numero qualunque di parti tutte uguali fra loro.

Nelle lingue piu' diffuse vi sono delle parole apposite per indicare il risultato di questa divisione: una meta', un terzo (o la terza parte), un quarto (o la quarta parte), un quinto (o la quinta parte)..., un decimo (o la decima parte) ecc. ecc.

L'operazione che stiamo descrivendo puo' essere simbolizzata in vari modi: considerato un numero naturale n, maggiore di 1, la grandezza che si ottiene dividendo una grandezza A in n parti uguali viene indicata con il simbolo:

(1) (1/n)A oppure A/n, oppure anche A:n,
leggendo "un ennesimo di A" oppure " A diviso per n".

Il primo tra i simboli (1) viene anche spesso scritto con una linea orizzontale, mettendo il numero 1 sopra la linea ed il numero n sotto la linea.

Questo modo di scrivere e' forse il piu' frequentemente usato, ma (come al solito) non intendiamo affatto dire che gli altri siano errati; noi sceglieremo qui la prima tra le scritture (1); questa ci permette infatti di mettere in evidenza il fatto che il simbolo "1/n" si presenta come un operatore su grandezze; precisamente un operatore che, applicato ad una grandezza qualunque A, produce (o indica) la grandezza che e' la sua parte ennesima. In questo modo cio' che diremo tra poco si ricollega in modo naturale a cio' che abbiamo detto sopra al N.5, presentando i numeri naturali come operatori sulle grandezze. Noi stiamo cosi' costruendo una nuova classe di operatori, che estende in modo spontaneo la classe degli interi naturali; vedremo che vi sono delle buone ragioni per dare il nome di numeri anche a questi nuovi operatori.

A cio' si giunge osservando che la grandezza indicata con (1/n)A puo' essere moltiplicata per un numero naturale m; si otterra' cosi' una nuova grandezza che puo' essere indicata con uno dei simboli:

(2) (m/n)A oppure mA/n oppure anche mA:n.
leggendo "emme ennesimi di A" oppure "emme A diviso n".

Questo simbolo viene anche scritto tracciando una linea orizzontale, e ponendo il numero naturale m sopra la linea ed il numero n sotto di questa.

Come e' noto, il simbolo "m/n" viene anche chiamato "frazione"; il numero m viene chiamato "numeratore" della frazione ed il numero n viene chiamato "denominatore" della stessa.

Si suole anche dire che la frazione e' "propria" oppure "impropria" oppure infine "apparente" a seconda che sia rispettivamente m<n oppure m>n oppure infine m sia un multiplo di n . Queste denominazioni, anche se molto diffuse, non hanno una grande importanza concettuale; e' invece molto importante osservare che il concetto di frazione rientra in quello di operatore tra grandezze, e che la scrittura (2) si presenta come la immediata generalizzazione della (1), e della (2) del N. 5.

8 - Le esperienze comuni, alle quali facciamo sempre riferimento per costruire questi nuovi concetti, insegnano che prendendo le due meta' di una grandezza A si ottiene la grandezza stessa, e cosi' avviene quando si prendano tre terzi della grandezze, o quattro quarti, o si prendano tutti gli n ennesimi in cui la grandezza si puo' immaginare divisa. Analogamente

l'esperienza comune insegna che prendere due quarti di una grandezza A equivale a prenderne la meta', e cosi' via. In generale si ha quindi che, indicando con k un naturale qualunque (diverso dallo zero), e':

(1) $$(km/kn)A = (m/n)A.$$

In altre parole, le due frazioni:

(2) $$km/kn \quad e \quad m/n$$

pur avendo numeratori e denominatori diversi, hanno lo stesso effetto come operatori sulle grandezze. Come e' noto, si suol dire che le due frazioni sono "equivalenti", e si suole scrivere:

(3) $$km/kn = m/n.$$

Si osservi che il simbolo "=", posto tra i due membri della (3) indica che queste frazioni, applicate come operatori ad una medesima grandezza, danno lo stesso risultato. Pertanto due frazioni diverse, se sono legate da una relazione come la (3), rappresentano uno stesso operatore tra grandezze, perche' - ripetiamo - pur essendo scritte in forma diversa, danno lo stesso risultato.

OSSERVAZIONE - Cio' che abbiamo detto si trova enunciato nei libri sotto forma di regola, la quale enuncia che "moltiplicando o dividendo (quando sia possibile) per un medesimo numero numeratore e denominatore di una frazione, questa non cambia".

Questa espressione puo' prestarsi a qualche equivoco, perche' si potrebbe osservare che la frazione, intesa come coppia ordinata di numeri, cambia con l'operazione descritta; cio' che non cambia e' l'operatore sulle grandezze, perche' (ripetiamo) le operazioni indicate da due frazioni che si ottengono l'una dall'altra con l'operazione descritta, eseguite su una qualunque grandezza, danno lo stesso risultato. Pertanto con l'operazione descritta si ottengono soltanto diverse rappresentazioni del medesimo operatore. Tuttavia non intendiamo giudicare errato il modo di esprimersi che abbiamo riportato sopra: preferiremmo tuttavia che, invece di dire che "la frazione non cambia", si dicesse "si ottiene una frazione equivalente".

Come e' noto, si suole dire che una frazione e' "ridotta ai minimi termini" quando il numeratore ed il denominatore non hanno fattori comuni, e quindi sono primi tra loro; l'operazione di riduzione di una frazione ai minimi termini e' talvolta opportuna per poter calcolare su numeri non grandi, ma non e' affatto necessaria; pertanto non riteniamo utile darle quell'importanza che le e' attribuita da qualche insegnante.

Si verifica qui un fatto analogo a quello che abbiamo gia' visto, quando abbiamo osservato che, per esempio, esiste una qualita' comune a tutti gli oggetti che tengono in equilibrio la bilancia quando sono posti su un piatto, e sull'altro e' sempre lo stesso oggetto; allora abbiamo detto che tutti questi oggetti hanno lo stesso peso. Ora diremo che tutte le frazioni che sono legate da una relazione come la (2) rappresentano lo stesso "numero razionale". Queste frazioni sono in numero infinito, ma ognuna opera nello stesso modo delle altre sulle grandezze. Si suole dire che tutte le frazioni che abbiamo chiamato equivalenti costituiscono una "classe di equivalenza"; una qualunque frazione di una classe, considerata come operatore su grandezze, e' sostituibile ad un'altra qualesivoglia, perche' ottiene lo stesso effetto.

In particolare, sempre dalla esperienza comune, si trae l'osservazione che, quando si divisa una grandezza A in n parti uguali, e poi si prendano tutte le parti ottenute dalla divisione, si ottiene ancora la grandezza A di partenza. Quindi l'operatore che si indica con il simbolo frazionario (n/n), e' equivalente ad un altro operatore qualunque (k/k), e lascia invariata la grandezza A: cio' si traduce scrivendo:

(4) $(n/n)A = 1\ A = A$;

e, traducendo il significato della (4) sugli operatori:

(5) $n/n = 1$.

9 - Abbiamo affermato poco sopra (al N.7) che esistono delle buone ragioni per giustificare il fatto che daremo il nome di "numeri" a questi operatori che abbiamo costruito. Questa giustificazione si ottiene facendo vedere che per questi nuovi enti si possono definire delle operazioni che si potranno chiamare "somma" e "prodotto", e che hanno le stesse proprieta' formali delle operazioni che abbiamo preso esplicitamente in considerazione per i numeri naturali. Tali proprieta' formali, come abbiamo visto sopra (N. 11 PARTE I) sono: la commutativa e l'associativa, per la somma ed il prodotto, e la distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Le definizioni che daremo per le operazioni sui numeri razionali sono fondate sulle proprieta' intuitive delle grandezze; le stesse proprieta' ci suggeriranno le convenzioni che sceglieremo per le operazioni sui numeri razionali.

In questo ordine di idee e' comodo definire anzitutto l'operazione di prodotto di due numeri razionali. Prima di procedere oltre osserviamo che, in base al significato stesso delle operazioni concrete sulla base delle quali abbiamo introdotto i numeri razionali, si puo' concludere che nessuno dei termini di una frazione che abbiamo preso in considerazione ha il valore zero. Questa proprieta' sara' considerata valida anche nel seguito fino ad esplicito avviso contrario. La definizione di prodotto si ottiene osservando che, dati due numeri naturali, che chiameremo n e q , prendere (1/n) di una gandezza A, e poi prendere (1/q) di quella gia' ottenuta, porta ad una grandezza che si ottiene dividendo la grandezza A in n*q parti uguali; pertanto il risultato che si ottiene e' lo stesso che si otterrebbe prendendo prima (1/q) di A e poi prendendo (1/n) della grandezza ottenuta.

Si suole tradurre simbolicamente queste considerazioni scrivendo:

(1) $(1/n)*(1/q)A = (1/q)*(1/n)A = (1/n*q)A$.

Richiamando anche qui le considerazioni svolte poco sopra al N.8, potremo generalizzare le notazioni (1) e definire in generale il prodotto di due numeri razionali (m/n) e (p/q) con la formula:

(2) $(m/n)*(p/q) = p*m/q*n$;

si trae di qui che il prodotto di numeri razionali possiede le proprieta' formali del prodotto di due numeri naturali:

commutativa ed associativa.

D'ora innanzi potremo convenire di indicare un numero razionale anche con una sola lettera dell'alfabeto, come a, b, c,...x, y,..z ecc., ovviamente intendendo che con un unico simbolo si indica una coppia di naturali (una tra le infinite, come e' detto sopra nel N.8) che costituiscono l'operatore tra grandezze, identificato nel numero razionale.

Insieme con le proprieta' ora rilevate, il prodotto tra numeri razionali possiede anche una proprieta' nuova, che i naturali non posseggono. Per esporre questa proprieta' ricordiamo cio' che e' stato detto sopra, alla fine del N. 8, e la definizione che abbiamo dato di prodotto di razionali. In base a queste, possiamo osservare che, se eseguiamo il prodotto dei due razionali m/n ed n/m otteniamo:

(3) $(m/n)*(n/m)= m*n/n*m = 1$.

Due numeri razionali tali che il loro prodotto dia il razionale k/k=1 vengono chiamati "reciproci tra loro". Pertanto la costatazione ora fatta potrebbe essere riassunta dicendo che: "Ogni numero razionale a ha un suo reciproco" . Questo viene solitamente indicato con il simbolo 1/a, avendosi quindi:

(4) $a*(1/a) = 1$.

Osserviamo esplicitamente che :

I) il reciproco di un numero razionale e' ancora un numero razionale;

II) ognuno dei due numeri a ed 1/a e' reciproco dell'altro.

Osseviamo ancora che la proprieta' ora presentata e' del tutto nuova, e non vale per i numeri naturali.

Pertanto il sussistere di questa e di altre proprieta' autorizza a dire che i razionali, che stiamo costruendo, costituiscono una "estensione" dei naturali; questa affermazione vorrebbe significare che i razionali hanno le proprieta' dei naturali ed inoltre ne posseggono altre, che i naturali non hanno. Tuttavia si puo' anche osservare che i naturali posseggono certe proprieta' che non sono possedute dai razionali. Una proprieta' cosiffatta sara' presentato in seguito, quando avremo introdotto nei razionali una relazione che chiameremo "di ordinamento totale".

10 - Abbiamo definito per le frazioni, considerate come operatori tra grandezze, una operazione di prodotto; possiamo ora definire anche una operazione di somma, e cio' completera' la giustificazione (di cui abbiamo detto) del fatto che questi operatori sono chiamati "numeri", sia pure con un aggettivo che li distingue dai numeri naturali.

La definizione della operazione di somma si basa sulla osservazione del fatto che se si hanno due grandezze che sono entrambe dei multipli di un n-esimo di una terza, la loro somma e' ancora un multiplo di un ennesimo di questa. Segue di qui regola che esprime la definizione della somma di due numeri razionali quando essi siano rappresentati da due frazioni che hanno lo stesso denominatore: la frazione che rappresenta la somma si ottiene in tal caso assumendo come numeratore la somma dei numeratori, e conservando il denominatore comune; in formule:

(1) $p/n + q/n = (p+q)/n$.

Il caso in cui i due numeri razionali da sommare siano rappresentati da frazioni che non hanno lo stesso denominatore si riconduce al precedente, ricordando che uno stesso numero razionale puo' essere rappresentato in infiniti modi, come e' stato detto sopra, al N.8.

Pertanto le due frazioni che non hanno lo stesso denominatore possono sempre essere sostituite da due altre, le quali hanno come denominatore un multiplo comune ai due denominatori delle frazioni date; una operazione cosiffatta si puo' eseguire facilmente moltiplicando entrambi i termini diuna delle due frazioni per il denominatore dell'altra; in formule si ottiene quindi:

(2) $m/n + p/q = (m*q + n*p)/n*q$.

Spesso, per eseguire questa operazione, vengono anche insegnate delle regole che conducono a trovare il minimo dei denominatori comuni alle due frazioni date; questa operazione e' analoga a quella della riduzione di una frazione ai minimi termini, di cui abbiamo detto sopra al N.8. Essa puo' essere opportuna per evitare calcoli con numeri naturali grandi, ma non e' affatto necessaria, e pertanto la ricerca del minimo denominatore comune a due frazioni non ha quell'importanza che spesso le viene attribuita; la cosa veramente importante e' il fatto che la somma puo' essere eseguita soltanto su frazioni che abbiano lo stesso denominatore.

Si dimostra che l'operazione di somma di numeri razionali, definita poco fa, possiede le proprieta' formali dell'operazione di somma eseguita su numeri razionali; tali proprieta' vengono richiamate con termini tecnici ben noti: proprieta' commutativa, associativa, distributiva del prodotto rispetto alla somma; esse vengono espresse sinteticamente dalle formule seguenti, nelle quali abbiamo indicato ogni numero razionale con un solo simbolo, come abbiamo detto sopra (N. 9):

(3) $a+b = b+a$ (proprieta' commutativa)

(3) $(a+b) +c = a +(b+c)$ (proprieta' associativa)

$a*(b+c) = a*b + a*c$. (proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma).

11 - Nel N. precedente abbiamo visto come sia sempre possibile rappresentare due numeri razionali con frazioni aventi denominatori uguali tra loro; questa operazione e' fondamentale (come abbiamo detto) per poter eseguire l'operazione di somma di due numeri cosiffatti. osserviamo ora che la riduzione al medesimo denominatore permette anche di eseguire una operazione logica molto importante, e precisamente l'operazione di confronto; precisamente, dati due numeri razionali x ed y , diremo che x e' maggiore di y e scriveremo:

(1) $x > y$

se avviene che, rappresentando i due numeri con frazioni aventi uguali denominatori, il numeratore della frazione che rappresenta x sia maggior di quello della frazione che rappresenta y.

Analogamente, diremo che x e' minore di y e scriveremo:

(2) $$x < y,$$

se avviene che,rappresentando i due numeri con frazioni aventi denominatori uguali, il numeratore della frazione che rappresenta x sia minore del numeratore della frazione che rappresenta y.

Si puo' osservare che con le convenzioni stabilite abbiamo definito una relazione tra coppie di numeri razionali, relazione che viene chiamata "di ordinamento" Si verifica facilmente che la relazione indicata con il simbolo (1) possiede le proprieta' della analoga relazione che si puo' stabilire tra numeri naturali ; tali proprieta' sono del tutto intuitive, ma le richiamiamo qui per la loro importanza:

I) dati due numeri razionali diversi a e b , sussiste tra di essi una ed una sola delle due relazioni:

$$a < b \quad \text{oppure} \quad a > b \ .$$

II) Dati tre numeri razionali, a , b , c , se e':

$$a < b \quad \text{ed anche} \quad b < c,$$

allora si ha anche:

$$a < c \ .$$

Carlo Felice MANARA.
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA PER PROBLEMI.
SPUNTI DI RIFLESSIONE E DISCUSSIONE.

1 - Il concetto di problema matematico.

Le considerazioni che seguono vorrebbero essere una serie di spunti di discussione, e sono destinate, nella intenzione di chi scrive, a stimolare ulteriori approfondimenti da parte dei Lettori; pertanto non debbono essere viste come una insieme di precetti per la soluzione di problemi didattici, che sono spesso complicati e difficili, ma invece come un avvio all'analisi ed al chiarimento, ed alla ricerca di una strategia efficace, quando essa esista.

In linea preliminare, vorremmo osservare che l'insegnamento della matematica dovrebbe mirare a far comprendere ed a far possedere un insieme di strumenti logici e di mezzi espressivi utili alla formazione personale ed alla crescita intellettuale; pertanto tale insegnamento non dovrebbe limitarsi ad addestrare all'impiego di formule memorizzate e di procedure prestabilite, ma dovrebbe tendere alla formazione dell'uomo razionale e coerente.

Prima di proseguire nelle nostre riflessioni, vorremmo fare una breve analisi dei termini che intendiamo usare. Infatti oggi, nella generale imprecisione dei linguaggi, e nella confusione che ne consegue, il termine "problema" viene usato troppo frequentemente , ed in modo errato o quanto meno equivoco ed impreciso: per esempio esso viene usato al posto di molti altri, che sarebbero ben piu' comprensibili e precisi, come cruccio, difficolta', incertezza, impiccio, sofferenza, dolore, dubbio, perplessita', angoscia e cosi' via, accumulando spropositi e confusioni. Noi vorremmo evitare queste ultime, che non vanno certo a favore della chiarezza delle idee, e quindi dell'incremento della conoscenza e del sapere; pertanto noi intendiamo riservare al termine "problema" il suo significato classico; questo potrebbe essere richiamato brevemente dicendo che il termine stesso indica una questione o una situazione nella quale si debbono rendere esplicite certe informazioni che gia' sono contenute implicitamente in altre, le quali vengono abitualmente chiamate "dati" del problema. Di conseguenza "risolvere un problema" significa formulare esplicitamente certe informazioni ricavandole , con procedimenti razionali, il principale tra i quali e' la deduzione; cio' avviene per esempio nel caso del problema matematico, al quale faremo sempre riferimento nel seguito. Non prenderemo quindi in considerazione la risposte ad un problema che possono essere ottenute con un procedimento induttivo, cioe' con la generalizzazione di poche esperienze od osservazioni, fatte in casi particolari, spesso in numero relativamente ristretto.

Noi supporremo inoltre che il problema di cui ci interesseremo tragga la sua origine da un enunciato, il quale espone una situazione particolare e concreta, e richiede una risposta, cioe' richiede - ripetiamo - ulteriori informazioni esplicite, in base a quelle che gia' sono fornite nell'enunciato.

2 - La soluzione di un problema in teoria: l'analisi e la sintesi.

Abbiamo detto che la soluzione di un problema e' un procedimento razionale. Infatti cio' che interessa l'aspetto formativo dell'insegnamento non e' tanto la materialita' della risposta, quanto sua motivazione, e la procedura razionale con la quale la risposta e' ottenuta. Pertanto, in questo ordine di idee, il problema matematico e' molto diverso da un "indovinello", nel quale la risposta puo' anche essere data a caso, e sopratutto non deve essere giustificata razionalmente, purche' sia giusta.

Dal punto di vista strettamente teorico ed astratto, la soluzione di un problema e' stata analizzata e codificata gia' dalla matematica e dalla filosofia greca, con il riconoscimento dei due fondamentali procedimenti di analisi e di sintesi. Questi vengono descritti da Euclide nel modo seguente:

" <Si chiama> analisi un procedimento in cui si ammette come vera una certa proposizione <che si vuole dimostrare> e si deduce da questa ipotesi una serie di conseguenze fino a giungere a qualche proposizione che e' evidente, oppure e' stata ammessa come vera. <Si chiama> sintesi il procedimento con il quale , partendo da certe proposizioni accettate, si giunge ad una proposizione che si vuole dimostrare."

Il matematico greco Proclo, qualche secolo dopo, aggiunge, a proposito della procedura per risolvere i problemi:

"Nella analisi problematica si immagina esistente l'ente che si vuole cercare o costruire, e da questa ipotesi si traggono le conseguenze, fino a che si giunge, per successivi passaggi logici, a qualche cosa che e' stato accettato o ammesso; allora

a) se cio' che e' stato accettato o ammesso esiste ed e' effettivamente costruibile, cioe' puo' essere considerato matematicamente come un "dato", allora cio' che e' oggetto del problema e' pure un ente che esiste; e la dimostrazione di questo fatto si ottiene facendo a ritroso le dimostrazioni svolte durante il procedimento di analisi; oppure

b) si giunge a qualche cosa che e' chiaramente impossibile,ed allora anche il problema proposto non sara' risolubile."

Il matematico e filosofo Federigo Enriques ha ulteriormente precisato queste idee , scrivendo:

"La scuola di Platone, e poi di Eudosso, da' un particolare significato logico e metodologico del procedimento "analitico" che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici. In questa analisi si comincia a supporre che il problema proposto P sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza del precedente, finche' si arriva ad un problema R che si sa risolvere. La "sintesi" consiste nel nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema R , e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di P. Questa dimostrazione e' necessaria, perche' coll'analisi si e' dimostrato soltanto che le soluzioni di P sono anche soluzioni di R, ma non viceversa. Insomma l'analisi e' una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprieta' o note che la determinano. <...>. Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si puo' dire della sintesi la quale, da sola, fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte."

3 - Le fasi della procedura psicologica di soluzione di un problema matematico.

Cio' che abbiamo riportato dai classici, a proposito della soluzione dei problemi matematici, ha una sicura ed indubbia validita', e deve essere tenuto sempre presente come quadro fondamentale logico di riferimento. Tuttavia a noi interessa analizzare l'aspetto psicologico del cammino che la nostra mente percorre per giungere alla risposta ad un problema dato; infatti questo aspetto interessa il lavoro dell'insegnante, che deve provvedere, come si e' detto, a dare agli allievi una formazione alla razionalita' ed alla coerenza.

In questo ordine di idee si potrebbe osservare che la soluzione di un problema matematico passa attraverso certe fasi, che cercheremo di analizzare; infatti riteniamo che il superamento di ognuna di queste fasi presenti al discente difficolta' particolari e specifiche; in corrispondenza a tali difficolta' si offrono al docente certe possibilita' di educazione e di formazione, che egli dovrebbe conoscere, per poterle sfruttare. Osserviamo tuttavia che queste fasi, che sono in teoria distinte, nella pratica possono anche non essere completamente separate tra loro, e potrebbero anche succedersi nel tempo con una successione cronologica non sempre perfettamente corrispondente alla gerarchia logica; e cio' accresce la utilita' dell'analisi che stiamo per fare, per poter dare al docente la possibilita' di discernere le diverse componenti di una stessa azione del discente, azione che puo' anche presentarsi complessa e spesso confusa.

Le fasi a cui accennavamo sopra possono essere presentate ed elencate nel modo seguente:

I - Il riconoscimento della essenza del problema matematico nell'enunciato che si propone.

II - La ricerca di una procedura di soluzione, cioe' la invenzione o la costruzione di una strategia che renda esplicite le informazioni che si possono trarre dai dati, cioe' dalle informazioni gia' fornite dall'enunciato.

III - L'utilizzazione degli strumenti matematici per la deduzione, allo scopo di giungere a certe conclusioni, e poi l'interpretazione concreta dei simboli matematici, nella realta' della situazione che e' stata presentata come oggetto del problema.

4 - L'enunciato del problema ed il riconoscimento della situazione matematica.

Da quanto abbiamo detto segue che in un primo momento il discente si trova di fronte all'enunciato di un problema matematico; tale enunciato viene presentato con il linguaggio comune (la lingua materna del discente), e presenta di solito una situazione concreta, anche se non fisicamente presente al discente nella sua corporeita' materiale. La presentazione di questa situazione concreta fornisce anche, di solito, le informazioni da cui il discente deve partire , e delle quali deve profittare per trovare le risposte.

Si potrebbero osservare le seguenti difficolta' che in questa fase il discente deve superare:

I - L'individuazione della situazione che richiede una risposta; e' questo un esercizio di decodificazione , che il discente deve fare per capire il significato della situazione concreta che gli viene presentata.

II - La schematizzazione della situazione , ai fini della sua codificazione coi simboli della matematica.

Per esempio, se il problema parla di un oggetto a forma di parallelepipedo, il discente deve individuare la caratteristiche dell'oggetto stesso che interessano ai fini della risposta cercata: per esempio il colore dell'oggetto non deve essere preso in considerazione, si si tratta di valutarne l'ingombro; e l'ingombro non va preso in considerazione se si tratta di valutarne il peso.

E' questo dunque un primo momento in cui il discente viene condotto a mettere in opera un procedimento di astrazione , cioe' un procedimento mentale che lo porta a considerare soltanto alcuni elementi di una situazione concreta, elementi che sono i soli interessanti ai fini della risposta.

Abitualmente soltanto questi ultimi elementi sono precisati direttamente nell'enunciato del problema; tuttavia puo' anche accadere che le informazioni dell'enunciato siano sovrabbondanti, ed anche alcune siano inutili; in tal caso questa sovrabbondanza dovrebbe essere evitata oppure potrebbe essere cercata, a seconda che l'insegnante voglia evitare ogni distrazione al discente, oppure al contrario voglia sapere se il discente stesso e' capace di discernere da solo gli elementi interessanti e trascurare gli altri, che non sono pertinenti.

III - Gli aspetti della realta' che viene presentata debbono poi essere tradotti, e per cosi' dire codificati in simboli del linguaggio matematico (figure geometriche, numeri, relazioni, equazioni, ecc.), a seconda dei fini che si vogliono ottenere.

Cosi', per esempio, se si vuole calcolare il peso di una sfera di acciaio, le informazioni che interessano sono soltanto il raggio della sfera, ed il peso specifico dell'acciaio. La prima informazione serve per calcolare il volume della sfera, e potrebbe essere data direttamente nel testo del problema; la seconda potrebbe essere fatta cercare al discente il quale, con l'informazione sufficiente fornita dalla parola "acciaio", potrebbe essere in grado di cercare da solo il peso specifico su una tabella, la quale codifica le caratteristiche della materia coi simboli della matematica, ai fini cercati. Vorremmo osservare che quest'ultima operazione e' perfettamente razionale, e rientra nella sfruttamento delle informazioni accessibili al discente;

queste gli permettono di passare dalla descrizione qualitativa (acciaio) a quegli aspetti quantitativi (peso specifico nella fattispecie) che interessano il problema in esame.

Ci pare di poter dire che ognuno compie quotidianamente moltissime operazioni di questo tipo; compito dell'insegnamento della matematica e' anche quello di avviare all'analisi esplicita di queste operazioni, in modo che cio' che generalmente e' quasi inconscio e confuso diventi cosciente e chiaro, e quindi ripetibile e generalizzabile.

Riteniamo opportuno anche ricordare che occorrerebbe graduare lo sforzo di astrazione richiesto al discente, in modo da poterlo guidare progressivamente all'analisi logica degli enunciati verbali, ed all'operazione, non sempre facile, che consiste nell'individuare in un enunciato gli elementi che possono essere tradotti con linguaggio matematico, in relazione ad un determinato problema ed ad un determinato fine. Infatti un medesima realta' concreta puo' essere presa in considerazione in molti modi diversi, e quindi lo sforzo di astrazione che il discente deve compiere consiste nel mettere in evidenza soltanto quegli aspetti che occorrono nel caso in esame. Non si nega ovviamente l'esistenza di altri aspetti della realta', ma si afferma soltanto che l'esperienza si presenta come complessa e composita, mentre la conoscenza scientifica e razionale e' obbligata necessariamente a fare delle scelte, le quali si realizzano appunto con i procedimenti di schematizzazione e di astrazione di cui abbiamo detto.

5 - La ricerca della strategia risolutiva.

Abbiamo considerato una prima fase della risoluzione di un problema; essa consiste - come abbiamo detto - nella individuazione delle informazioni necessarie e nella codificazione di queste con gli strumenti del linguaggio matematico; una seconda fase potrebbe essere descritta come la ricerca di una risposta, cioe' nella ricerca di una procedura razionale e certa, che aiuti a formulare esplicitamente le informazioni che sono richieste dal problema, e che sono contenute implicitamente nei dati di questo.

Ripetiamo che non sempre e' possibile separare nettamente questo secondo momento dal primo, perche' spesso la strategia risolutiva puo' essere influenzata dal modo in cui e' stata conseguita l'astrazione dell'oggetto dal problema dall'enunciato della situazione concreta. Quindi i due momenti che stiamo considerando sono spesso difficilmente separabili, anche se possono essere distinti con una analisi accurata. Questa tuttavia non e' sempre facile, perche' non sempre chi escogita una strategia risolutiva di un problema riesce a rendersi conto dell'origine della strategia adottata; e, quando cio' avviene, non sempre riesce a comunicare agli altri questa analisi. Tuttavia noi pensiamo che essa sia molto utile, sopratutto perche' puo' permettere al docente di rendersi conto della genesi di eventuali strategie sbagliate, in modo da poter guidare il discente alla loro correzione.

In linea di massima, si potrebbe dire che l'invenzione di una strategia di soluzione si basa molto spesso sulla scoperta di una analogia, ovvero sul collegamento del problema particolare e concreto, che e' proposto, con altri, posti in casi simili; in questa procedura quindi la fantasia ha un grande parte. Cio' e' di fondamentale importanza nei problemi di geometria, nei quali, come e' stato visto sopra (N. 2) il procedimento di soluzione chiamato di "analisi" prende le mosse dall'immaginare il problema risolto; pertanto, in questi casi, la capacita' di immaginare figure simili a quelle date, oppure di immaginare delle manipolazioni o degli spostamenti, che portino la figura data in una situazione piu' nota o piu' abituale, aiuta molto il discente nella ricerca della soluzione. Tuttavia si possono fare delle considerazioni analoghe a proposito di problemi di aritmetica: per esempio, quando il discente ha capito che l'operazione di far uscire tre scolari da un'aula che ne contiene trenta e' analoga a quella di estrarre tre gettoni da un sacchetto che ne contiene trenta, ha eseguito quella operazione di astrazione che lo ha condotto al livello del concetto generale di numero naturale, e lo porta quindi a considerare soltanto gli aspetti matematici comuni alle due questioni, le quali sono materialmente distanti tra loro, ma coincidono concettualmente.

Questa seconda fase della soluzione del problema conduce spesso alla necessita' o alla opportunita' di operare su simboli delle cose. Tali simboli possono essere delle figure, che rappresentano la realta' concreta schematizzata con gli enti della geometria, oppure sono simboli numerici. In questo secondo caso, le trasformazioni dei simboli, mediante le "operazioni" aritmetiche, traducono le deduzioni di cui e' stato detto nel N. 2, e realizzano in tal modo la strategia risolutiva che si e' adottata. Cosi', nell'esempio aritmetico citato poco sopra, dal riconoscimento del fatto che i due problemi sono simili, si giunge all'operazione di "sottrazione", la quale viene eseguita sui numeri che rappresentano gli insiemi considerati.

E' appena necessario osservare che le operazioni eseguite sui numeri sono qualche cosa di diverso dalla strategie risolutiva del problema: esse infatti sono soltanto un mezzo, uno dei tanti, con il quale la strategia puo' essere messa in esecuzione. Pertanto l'esecuzione delle operazioni aritmetiche e' soltanto un momento esecutivo, che puo' essere molto importante, ma che non deve essere posto in posizione primaria rispetto all'invenzione della strategia risolutiva. Invece spesso, nella mente del discente, l'operazione aritmetica da eseguire assume una importanza rilevante e quasi fondamentale rispetto all'invenzione di una strategia risolutiva. Cio' e' forse dovuto anche al fatto che l'operazione aritmetica deve rispettare delle regole molto rigide; queste debbono essere rispettate tutte (sotto pena di inficiare il risultato del calcolo), e debbono essere memorizzate faticosamente, in modo tale che l'utente spesso non le sa pienamente giustificare . Tuttavia il docente dovrebbe saper distinguere tra i due momenti, cioe' quello della invenzione della strategia risolutiva e quello del calcolo, perche' egli dovrebbe saper intervenire a vari livelli, a seconda degli errori che il discente eventualmente commette.

Vorremmo anche aggiungere che la scoperta dell'analogia tra due problemi materialmente diversi tra loro, ma strutturalmente identici, potrebbe giustificare e legittimare la risoluzione di un problema su di un "modello" della realta' di cui parla l'enunciato del problema in discorso. Cosi' per esempio, nel caso del problema considerato poco fa, quando si fossero dimenticate le regole che reggono l'operazione aritmetica di "sottrazione" sui numeri, una strategia perfettamente ragionevole e legittima (per quanto scomoda) potrebbe consistere nel contare i gettoni rimasti nel sacchetto. Infatti cio' che costituisce realmente l'essenza logica della soluzione e' il riconoscimento della sostanziale identita' dei due problemi e non la capacita' di eseguire correttamente certe manipolazioni sui simboli.

A questo proposito pensiamo che sia bene ricordare che nella nostra societa' stanno diffondendosi i calcolatori elettronici tascabili: infatti tali strumenti sono venduti a prezzi molto bassi, ed il loro impiego sta diventando comune a tanti soggetti. Cio' va tenuto presente quando si tratti di distinguere tra i due momenti della soluzione di un problema matematico: infatti l'adozione di uno strumento di calcolo permetterebbe di eliminare quasi del tutto la fatica materiale della computazione, e quindi permetterebbe di concentrare l'attenzione soltanto sul momento essenziale , che e' quello della invenzione della strategia risolutiva. Ovviamente queste considerazioni non hanno un valore assoluto e generale: e' infatti ancora necessario insegnare l'esecuzione delle operazioni aritmetiche , anche per evitare ai discenti la jattura di diventare completamente schiavi di questi apparecchi.

6 - L'interpretazione dei risultati.

Abbiamo visto che la scelta della procedura di soluzione di un problema aritmetico conduce alla manipolazione di certi strumenti espressivi (per esempio numeri, operazioni ecc.) con i quali abbiamo rappresentato la realta' concreta, che ci e' stata presentata nell'enunciato del problema stesso.

La manipolazione dei mezzi espressivi si realizza con quell'insieme di operazioni (trasformazioni di figure geometriche, operazioni sui numeri ecc.) sui simboli che abbiamo adottato; sostanzialmente quindi questa manipolazione si riduce ad eseguire delle operazioni su certi modelli della realta' concreta; pertanto il momento essenziale di queste procedure consiste nel cercare se e quanto i modelli che abbiamo scelto rendono quegli aspetti della realta' che vogliamo conoscere, e nell'indagare se e quanto le manipolazioni sui modelli ci forniscono effettivamente le informazioni che desideriamo.

In altre parole, se i modelli della realta' sono stati scelti bene, le operazioni che eseguiamo su di essi ci permettono di dedurre, cioe' ci costruire delle proposizioni vere partire da quelle proposizioni che sono state enunciate nel problema, e che noi accettiamo come vere. Quindi le operazioni suddette ci permettono di rendere esplicite le informazioni che ci sono state date in partenza, e presentano queste informazioni in modo che siano direttamente comprensibili.

Insistiamo su queste osservazioni perche' vorremmo che fosse chiaro il fatto che le manipolazioni, i calcoli, le trasformazioni che noi eseguiamo non ci possono dare delle informazioni essenzialmente nuove. Cio' che diciamo si applica sopratutto alla "lettura", ossia alla interpretazione dei risultati di certe operazioni con le quali abbiamo cercato di rispondere al problema, e quindi si applica anche alla valutazione del significato di queste operazioni. Noi pensiamo infatti che ad ogni livello di eta' ed in ogni classe di insegnamento si possa presentare un giusto concetto della matematica : questa e' una scienza che fornisce un insieme di strumenti di astrazione e di concettualizzazione e di deduzione; che raggiunge un particolare livello di certezza sopratutto nella deduzione, ma che non puo' costruire la certezza laddove essa non si trovi gia' nell'osservazione originaria della realta', o nei dati di partenza.

Un esempio, tra i tanti possibili, aiutera' a chiarire il nostro pensiero: supponiamo dato il problema di "calcolare la lunghezza della circonferenza che passa per i vertici del quadrato di lato unitario".

L'applicazione del teorema di Pitagora permette di affermare che la lunghezza del diametro della circonferenza vale la radice quadrata di 2. Allora la lunghezza della circonferenza puo' essere calcolata moltiplicando la lunghezza del diametro per il numero fisso , che molti chiamano costante di Archimede, e che viene anche frequentemente chiamato "pi greco". Per questa costante viene spesso assunto il valore approssimato 3.14. Supponiamo che un operatore, in cerca di una pretesa precisione matematica, ricerchi sulle tavole numeriche, o tragga da un calcolatore tascabile, il valore 1.4142136 per la radice quadrata di 2, cioe' per la lunghezza del diametro della circonferenza, e che moltiplichi questo valore per 3,14, ottenendo, secondo le regole dell'aritmetica pratica, il numero 4.440630704. Questo operatore puo' essere tentato di compiacersi per la grande precisione del risultato ottenuto, che ostenta ben 9 cifre decimali , e che quindi da' l'illusione di un possibile errore minore 0.000000001.

Orbene, si vede facilmente che questa pretesa precisione e' completamente illusoria, perche' le cifre attendibili del risultato sono soltanto le prime due dopo il punto; infatti la lunghezza della circonferenza in oggetto e' compresa tra 4.442 e 4.443 .

L'origine dell'errore sta nel fatto di aver adottato il numero 3.14 come valore approssimato della costante di Archimede, commettendo cosi' un errore dell'ordine di 1/100, e di non aver tenuto conto del fatto che tale errore si ripercuote ovviamente sul risultato, ma forse sperando che l'operazione matematica rimediasse quasi magicamente al difetto delle informazioni che sono state assunte in partenza, prima del calcolo.

Questi ragionamenti, ed altri analoghi, potrebbero forse sconcertare coloro i quali considerano la matematica come la scienza della certezza per eccellenza, ma dimenticano che l'elaborazione matematica non puo' fornire informazioni che non siano gia' contenute nei dati.

Pensiamo quindi che l'insegnante non debba lasciar passare nessuna occasione per togliere alla matematica quell'aspetto quasi magico che molti le attribuiscono, e per presentare invece il suo vero aspetto, cioe' quello di uno strumento per la deduzione ineccepibile e per la formazione scientifica degli allievi.

7 - La geometria come prima schematizzazione scientifica del reale.

La storia della scienza insegna che la prima conoscenza scientifica della realta' si e' realizzata con la geometria greca; e qui, con la espressione "conoscenza scientifica", intendiamo indicare una conoscenza che abbia i caratteri della certezza e della motivazione, cioe' una conoscenza che non presenti soltanto i fatti, oppure le cose come sono (il che sarebbe solo informazione), ma anche spieghi, nei limiti del possibile, perche' le cose ci appaiono in un certo modo.

In questa luce, ed in questo ordine di idee, il celebre libro degli "Elementi" di Euclide ci si presenta come il primo trattato scientifico della storia umana, cioe' un trattato in cui, a partire da certe proposizioni iniziali, date senza dimostrazione in forza di una loro presunta evidenza, ogni altra proposizione viene rigorosamente dimostrata, e quindi acquista quella certezza che le e' conferita dalla certezza delle premesse e dal rigore della deduzione.

Occorreranno quasi venti secoli perche' l'umanita' riesca a conquistare altri domini di conoscenza con lo stesso stile e con procedure analoghe; invero in questo ordine di idee noi vorremmo dire che i "Principia mathematica" di I. Newton fanno rientrare la meccanica dei corpi rigidi, cioe' le leggi del movimento dei corpi in relazione alle cause che lo producono, nello schema ideale che il trattato euclideo aveva tracciato.

Sulla scorta di queste considerazioni noi pensiamo che l'insegnamento della geometria abbia un profondo carattere formativo della mentalita' scientifica a tutti i livelli di eta' e di scuola , carattere che difficilmente potrebbe essere surrogato da altre materie e da altri insegnamenti.

Per quanto riguarda la scuola elementare, vorremmo ricordare che un primo passo verso la conoscenza razionale del mondo attraverso la geometria potrebbe essere realizzato con l'educazione alla osservazione attenta ed all'uso di un linguaggio preciso. Si puo' infatti osservare che l'uomo, nel suo primo contatto con la realta' che lo circonda, tende a rappresentare l'universo in relazione a se stesso; quindi l'uomo descrive la propria situazione rispetto agli oggetti che lo circondano distinguendo un "davanti" ed un "dietro", un "sopra" ed un "sotto" e cosi' via, e di conseguenza e' portato a dare carattere di obiettivita' a certe espressioni che invece non lo posseggono.

Quindi un primo scopo educativo che si puo' raggiungere con l'insegnamento della geometria puo' consistere nel portare il discente a riflettere che alcune circostanze possono variare, nella posizione dei corpi e nella loro grandezza; e che, se vuole comunicare agli altri le proprie osservazioni, in forma obiettiva, deve sforzarsi di porsi nella situazione degli altri osservatori, e comunicare le proprie sensazioni ed osservazioni in modo che le comunicazioni abbiano il massimo di validita'. Purtroppo l'abitudine al linguaggio impreciso porta troppo spesso a confondere per esempio "verticale" con "perpendicolare" e "orizzontale" con "parallelo", cioe' a confondere cio' che ha significato soltanto con riferimento ad un osservatore con cio' che invece non dipende da questo. Analoghe osservazioni potrebbero essere fatte a proposito di certo linguaggio che vorrebbe essere tecnico e che invece determina inconvenienti analoghi: come per esempio l'abitudine diffusa di parlare di "base"! e di "altezza" di un triangolo, inducendo cosi' l'ascoltatore o il lettore a pensare che esista una qualita' inerente ad un determinato lato della figura, indipendente dalla posizione di un immaginato osservatore.

Gli esempi si potrebbero moltiplicare, e porterebbero a ricordare grandi quantita' di frasi imprecise ed equivoche, o addirittura prive di senso, come quella celebre frase in cui si parlava di "convergenza delle parallele"; frase il cui grande successo politico fu ovviamente causato dalla sua assurdita' concettuale.

Per evitare questi ed altri inconvenienti sarebbe forse opportuno che gli insegnanti non presentassero certe figure in posizioni costantemente simili, in modo che negli allievi si formi un'abitudine a considerare certe circostanze accessorie, dovute alla presentazione dei casi particolari, come elementi essenziali dei concetti che le figure intendono simbolizzare.
Invece l'insegnante dovrebbe sforzarsi di presentare diverse realizzazioni del medesimo concetto geometrico, e di educarsi ed educare alle enunciazioni precise ed all'impiego di un linguaggio limpido; ma sopratutto sforzarsi ad educare alla obiettivita' della osservazione e della espressione. Infatti ad ogni livello la scienza tende a costruire delle proposizioni ed a formulare degli enunciati che siano validi per tutti ed in qualunque situazione di osservazione, e quindi tende a prescindere dalla situazione del singolo osservatore o del singolo scienziato.

Queste osservazioni possono essere considerate banali, e lo sono di fatto; perche' sono il patrimonio iniziale e fondamentale di chiunque si occupi di scienza in modo serio; ma riteniamo che sia utile ricordarle qui, perche' pensiamo che la formazione alla mentalita' scientifica possa essere iniziata fin dai primi anni di scuola; ed insieme con la mentalita' scientifica pensiamo che si possa dare la chiara sensazione dei limiti della scienza, delle sue capacita' di espressione e del suo potere di conoscere, nella convinzione che la scienza non puo' dire tutto della realta', la quale ci si presenta come inesauribile, ma puo' contribuire alla formazione della persona, con l'educazione alla obiettivita' ed alla umilta' di fronte al reale.

Pensiamo infine che non sara' mai abbastanza raccomandato che nell'insegnare la matematica si deve tener presente correttezza e la chiarezza della esposizione ed il rispetto per la nostra lingua nazionale.

8 - Il problema nell'insegnamento: punto di partenza o di arrivo ?

E' noto che anche nella didattica possono esistere delle mode; a volte esse sono conseguenze di studi pedagogici abbastanza seri, altre volte sono forse risultato di ricerca di novita', senza altro scopo apparente che il cambiamento ad ogni costo di cio' che esiste e che forse funziona; ed anche nella didattica spesso le mode hanno la durata di una breve stagione, analoga alla durata della moda femminile.

Una moda didattica che appare assai diffusa vuole che la matematica debba essere insegnata per problemi; probabilmente questa moda e' fondata su certi pronunciamenti delle autorita' politiche, secondo i quali la matematica ha per scopo la soluzione di problemi.

Personalmente ci confessiamo molto perplessi di fronte ad affermazioni come queste; ci pare infatti di poter dire sommessamente che l'insegnamento di una scienza qualunque (e quindi anche della matematica) debba avere come scopo la comunicazione della conoscenza; il fatto che questa conoscenza tragga con se', tra l'altro, anche la possibilita' di risolvere dei problemi e' soltanto una conseguenza, ma non dovrebbe costituire lo scopo primario dell'insegnamento, il quale, ripetiamo, dovrebbe mirare anzitutto a formare l'intelligenza e la personalita' del cittadino.

Per quanto riguarda poi la moda didattica di cui sopra, osserviamo che essa non e' neppure nuova, ma appare come una riscoperta ricorrente di cose gia' proposte e poi abbandonate, forse non senza ragione. Per esempio gia' nel secolo XVIII il matematico francese A.C. Clairaut scrisse una opera di piccola mole intitolata "Elements de geometrie", nella quale la geometria viene appunto presentata attraverso un certo numero di problemi pratici che, secondo l'Autore, hanno dato origine alle ricerche teoriche; nella prefazione dell'opera l'Autore critica le procedure abituali per insegnare la geometria.

Non intendiamo polemizzare in questa sede con i fautori di una oppure dell'altra corrente didattica, ma vorremmo semplicemente presentare qualche riflessione che aiuti i docenti nella scelta della strada che intendono percorrere, per raggiungere il fine dell'insegnamento.

Osserviamo anzitutto che ci pare abbastanza ovvio il fatto che l'insegnamento della matematica debba necessariamente includere anche il confronto con i problemi; se infatti consideriamo la matematica come un insieme di procedure di astrazione, concettualizzazione, espressione e deduzione, il suo studio deve necessariamente includere anche l'esercizio, che e' essenziale nell'apprendimento e nell'uso di ogni linguaggio, in quanto questo e' strumento di deduzione e di comunicazione.

E' tuttavia possibile presentare il problema matematico con vari atteggiamenti, a seconda della strategia didattica che si intende seguire e delle metodologia che si intende adottare: infatti il problema puo' essere considerato come un momento di applicazione, come un esercizio necessario (ripetiamo) per l'apprendimento spedito ed il dominio sicuro dei mezzi espressivi, oppure addirittura come il punto di partenza, come l'occasione iniziale e centrale che da' origine alla presentazione degli strumenti espressivi ed allo studio delle loro proprieta' formali e della loro struttura logica.

Ovviamente i due atteggiamenti sono abbastanza distanti tra loro: secondo il primo infatti gli strumenti formali della matematica sono presentati prima della loro utilizzazione; quindi quest'ultima viene vista soltanto come un momento di addestramento, ed una giustificazione "a posteriori" della validita' degli strumenti gia' presentati, e della loro potenza espressiva e deduttiva. Nel secondo caso invece gli strumenti della matematica vengono via via trovati o costruiti, e nascono, per cosi' dire, spontaneamente, perche' la loro presenza e la loro applicazione e' richiesta dalla necessita' di dare una risposta a certe domande che altrimenti rimarrebbero inevase; oppure la opportunita' della loro conoscenza viene convalidata dalla forte diminuzione di fatica e dalla crescita di certezza e di generalita' delle risposte che cosi' si possono dare ai problemi.

E' appena necessario osservare che la seconda strada ripercorre la evoluzione stessa della scienza, perche' i vari strumenti della matematica e le varie teorie di questa scienza si sono presentati spesso alla ribalta in occasione di determinati problemi, a cui occorreva rispondere , e che non potevano essere risolti con i mezzi di cui prima si disponeva; in altre parole, di potrebbe dire che gli strumenti matematici ed i problemi sono nati insieme, perche' un determinato problema ha richiesto l'elaborazione di certi strumenti, e viceversa il possesso di certi strumenti ha reso possibile il considerare certi problemi, prima neppure sfiorati, ed ha favorito la formulazione e la soluzione di altri.

Ci conforta in questa nostra opinione il pensiero che D. Hilbert ha espresso in un celebre intervento al Congresso mondiale dei matematici, tenutosi a Parigi nel 1900; secondo il grande matematico tedesco infatti, la matematica superiore non esisterebbe senza gli stimoli della geometria, della fisica e della meccanica.

Indipendentemente dalle considerazioni storiche, resta comunque il fatto che le strategie didattiche dettate dai due atteggiamenti possono essere molto diverse tra loro, e possono quindi anche richiedere diverse preparazioni e diversi atteggiamenti da parte degli insegnanti.

Non e' nostra intenzione dare qui un giudizio definitivo a proposito dei due atteggiamenti citati, e vorremmo quindi limitarci ad un tentativo di analisi, prendendo in considerazione la genesi di questi due atteggiamenti, e le eventuali conseguenze nei riguardi dell'apprendimento e della formazione personale dei discenti.

Si potrebbe pensare che il primo atteggiamento, cioe' quello tradizionale, che consiste nel presentare prima sistematicamente gli elementi del linguaggio matematica e poi farli applicare per mezzo di esercizi e problemi, sia sorpassato ed inefficace, e che invece le correnti didattiche, le quali predicano la presentazione della matematica per problemi, portino il segno della modernita' e quindi del progresso che a quella viene spesso associato. Cio' non e' completamente vero, come abbiamo gia' detto, citando Clairaut ed il suo tentativo di insegnamento della geometria per problemi, in contrasto con la procedura tradizionale.

Tuttavia si potrebbe osservare che la presentazione di una teoria qualsivoglia per problemi appare abbastanza efficace e valida quando la teoria stessa debba essere presentata a soggetti gia' maturi, come era appunto il caso citato di Clairaut; infatti i soggetti maturi hanno gia' in qualche modo un certo patrimonio di conoscenze , e difficilmente accettano di acquistarne altre se non sono stimolati con vivi interessi e con precisi contenuti. Invece la presentazione della materia secondo una linea sistematica e logica, che presenta via via la teoria nei suoi elementi prima di ogni applicazione, appare forse piu' efficace per soggetti in giovane eta', che hanno molta disponibilita' di memoria ed una massa di conoscenze relativamente minore.

Si potrebbe anche aggiungere che in questi ultimi soggetti, non sempre abituati all'analisi ed alla riflessione, la presentazione di un problema complesso, nella sua interezza e nella globalita' dei suoi aspetti, puo' causare confusione ed anche sensazione di impotenza , e che la gradualita' dell'insegnamento delle strutture complesse e' spesso condizione necessaria perche' queste vengano apprese.

Ripetiamo quindi che non abbiamo soluzioni generali, valide in ogni caso e definitive, perche' la presentazione della matematica per problemi ha degli indubbi vantaggi, che consistono nella sensazione di efficacia, di "presa" (per cosi' dire) sulla realta', sensazione che viene data dal modo stesso in cui la teoria viene costruita a partire dal problema; cosicche' la teoria stessa viene pienamente motivata nella sua esistenza e nella sua applicazione dalla presenza stessa del problema che la rende in qualche modo necessaria, o almeno ne testimonia l'efficacia ed il valore. Ma e' anche vero che questo modo di presentare una teoria puo' rendere piu' difficile al discente il districarsi dalle difficolta' logiche; difficolta' che sono particolarmente pesanti per coloro i quali si trovano a disagio nelle formulazioni teoriche astratte e nell'impiego dei simboli.

Non si deve infatti dimenticare che spesso certi soggetti (del resto anche intelligenti) provano una specie di repulsione per il simbolismo astratto ed artificiale della matematica, ed una grande antipatia per la deduzione formale , ottenuta in base alle sole leggi sintattiche dei simboli, deduzione che e' tipica della matematica. Di fronte a questi soggetti la presentazione della materia per problemi potrebbe avere anche degli aspetti negativi: infatti da una parte la presenza di un contenuto, a cui la fantasia puo' fare riferimento, potrebbe anche facilitare la giustificazione dell'impiego di mezzi espressivi simbolici e convenzionali; ma d'altra parte la necessita' di prendere in considerazione un problema concreto, nella sua complessita' e nella sua interezza, potrebbe scoraggiare chi non ha l'abitudine alla analisi attenta ed alla codificazione convenzionale delle situazioni concrete.

Sarebbe quindi augurabile in ogni caso un atteggiamento didattico la cui efficacia e validita' si fonda sulla continua aderenza alla realta' delle cose che si vogliono rappresentare; ma sopratutto sarebbe da evitare ogni esclusivismo metodologico ed ogni unilateralita' di atteggiamenti. Infatti si puo' pensare che ogni metodologia didattica abbia i suoi vantaggi e le sue difficolta', e che sia da respingere l'atteggiamento di chi attribuisce tutti i successi ai nuovi metodi e cerca di mascherare gli eventuali insuccessi con deboli pretesti.

In particolare crediamo che non esistano strade miracolose per la formazione della mentalita' matematica, ed invece pensiamo che la formazione matematica vada di pari passo con la maturazione del discente: sarebbe quindi illusorio credere che solo una determinata metodologia possa costruire dei pretesi geni matematici, con dei soggetti che non hanno ancora sviluppato una sufficiente maturazione anche negli altri campi della conoscenza.

9 - Lo sviluppo storico della scienza ed il suo insegnamento.

Vorremmo infine osservare che l'insegnamento della matematica per problemi puo' porre delle difficolta' analoghe a quelle che si incontrerebbero se, nell'insegnamento di una scienza, si volesse seguire pedissequamente il suo sviluppo storico. In questo ordine di idee infatti ci si trova spesso di fronte ad una situazione abbastanza ambigua e difficile: da una parte appare innegabile la grande utilita' di guardare ai problemi della matematica come erano alla loro origine, in modo da presentarli nella loro globalita' e da cogliere il significato che avevano quando erano, per cosi' dire, allo stato nascente. Ma d'altra parte non si puo' trascurare il valore della analisi metodica, della introduzione di concetti via via piu' difficili e piu' complessi, presentati secondo la loro gerarchia logica di dipendenza e complessita' e non semplicemente nell'ordine in cui cronologicamente sono stati elaborati.

Tuttavia il fallimento di mode didattiche anche recenti (come quella della cosiddetta insiemistica) ha messo in evidenza la difficolta' dell'apprendimento da parte dei discenti di certe teorie che ad essi appaiono distaccate dalla realta' concreta; infatti non sempre la semplicita' e la generalita' dei concetti e' garanzia della facilita' del loro apprendimento.

Cosi' certe correnti di didattica relativamente recenti hanno pensato di poter introdurre la cosiddetta "matematica moderna" in tutti i livelli di insegnamento, perche' hanno creduto di poter trovare la via di minima resistenza all'apprendimento cominciando con l'insegnare le idee piu' astratte e generali, e quindi considerate come le piu' semplici da apprendere. Ma e' facile osservare che la semplicita' delle idee generalissime non si accompagna necessariamente con la facilita' del passaggio dalle idee e dalle strutture generali al particolare concreto, e quindi, in definitva, con la facilita' dell'apprendimento; quest'ultimo e' un fenomeno molto complesso, e segue delle leggi che sono quasi certamente diverse da quelle che la logica ritrova nella gerarchia di idee della matematica.

Crediamo tuttavia di poter dire che nel procedimento dell'apprendimento ha una grande parte l'interesse del discente, e quella specie di sfida intellettuale che ogni uomo si trova a dover affrontare quando e' di fronte a qualche cosa di nuovo e di interessante. Ma la ricerca della giusta strategia didattica per poter sfruttare queste situazioni richiede sempre pazienza, studio, fatica e dedizione.

In particolare crediamo sia necessario osservare che nell'insegnamento per problemi il compito dell'insegnante dovrebbe essere anche quello di far riflettere i discenti sulla strada che essi hanno percorsa per giungere alla soluzione di un problema proposto. In altre parole, l'insegnante non dovrebbe lasciare la eventuale soluzione al piano puramente episodico, ma dovrebbe guidare il discente alla riflessione, alla critica, alla generalizzazione di cio' che e' stato trovato. Cioe' dovrebbe mirare alla costruzione della teoria logicamente strutturata, che e' il sostegno della soluzione di ogni problema, quando si voglia (come e' stato detto all'inizio) che questa soluzione non abbia i caratteri della risposta ad un indovinello, ma contribuisca alla crescita interiore dei giovani ed alla loro formazione alla razionalita'. 122390M.